SINOSSI A CURA DI FRANCESCO INFUSINI E ALESSIO LEONCAVALLO AD USO ESCLUSIVO DEGLI STUDENTI AL FINE DELLA PREPARAZIONE DELL'ESAME DI MATEMATICA FINANZIARIA PER I NUOVI CORSI TRIENNALI. CORREDATO A FINE DI OGNI CAPITOLO DA ESERCIZI ED IN PIU' INCLUSI DOMANDE APERTE E FORMULARIO.

[ESERCIZI AGGIUNTIVI AL LINK http://venus.unive.it/funari/eserciziMatFin.pdf]

INDICE

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

– 1 TEORIA DI BASE DELL'INTERESSE [CAP II del libro "FINANZA E INVESTIMENTI" autore D.G. LUENBERGER]

1.1 CAPITALE ed INTERESSE

Il concetto fondamentale di interesse è che se il tasso d'interesse è ***r*** (decimale), dopo un anno l'investimento iniziale risulta moltiplicato per ***1+r***.

1.2 LEGGE DELL'INTERESSE SEMPLICE

Se si applica la legge dell'interesse semplice il denaro investito per un periodo diverso da 1 anno produce interessi proporzionali alla durata ***totale*** dell'investimento.
L'investimento produce ogni anno un interesse pari a ***r*** volte l'investimento iniziale e le frazioni di anno vengono trattate in modo proporzionale.
Se una somma ***A*** è depositata su un conto a cui viene applicato l'interesse semplice ***r***, il valore totale dopo ***n*** anni $B_n=A*(1+rn)$.
In generale dopo un tempo ***t*** (espresso in anni) il ***valore del conto*** è $V_t=V_0*(1+rt)$
[Legge di Capitalizzazione]

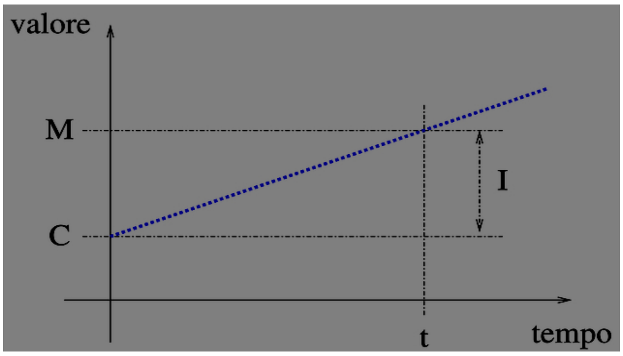


Grafico 1

Come da ***Grafico 1*** si può osservare che al ***variare*** del ***tempo*** (*asse delle x*) varia il valore del ***Capitale*** (*asse delle y*). Infatti al tempo zero il valore di ciò che è stato posto ad investimento ad un certo tasso ***r*** è pari al valore stesso del Capitale=C (*punto di partenza o intercetta con l'asse delle y*).
Nella trattazione si esplicita *intercetta con l'asse delle y* per richiamare il nesso tra questo *regime finanziario* e una variazione lineare=retta [y=mx+q] dove y=Vt, l'intercetta con l'asse delle y o il termine noto=V_0, m=V_0r e x=t.
Al termine del primo periodo si è generato il Montante=M pari alla somma tra il Capitale e l'Interesse=I [M=C+I].
Nella formula $V_t=V_0*(1+rt)$ il termine al membro di sinistra V_t è il valore al tempo ***t*** di ciò che vale V_0 al tempo zero ed il fattore di uguaglianza moltiplicativo tra i due membri è ***(1+rt).***

Esempio dei gelati:

Se una persona (posizione creditizia) presta un gelato ad un'altra persona (posizione debitoria) si priva dell'utilizzo dello stesso al tempo attuale ***V_0 (Valore Attuale)=C (Capitale)*** e questa privazione è pari all'interesse che dovrò restituirgli insieme al gelato ***V_t (Valore Futuro)=M (Montante)***.
Quindi se il gelato è composto da tre palline ***V_0=C*** e se l'interesse sarà una pallina aggiuntiva da

dargli pari a $V_0rt=I$ la somma genererà il valore al tempo t dell'intera operazione pari a $V_0^*(1+rt)=M=V_t$. Chiaramente oltre alla privazione del soggetto creditore c'è da inserire all'interno del computo del valore dell'interesse anche il rischio di insolvenza della controparte che verrà sintetizzato in un valore pari ad ***r=tasso d'interesse*** da cui deriva ***v=1+r=fattore di capitalizzazione.***

1.3 LEGGE DELL'INTERESSE COMPOSTO

Alla maggior parte dei conti bancari e dei prestiti viene applicata una forma di capitalizzazione che determina la produzione di interessi composti ovvero il conto frutta interessi sugli interessi anno dopo anno.
Se la capitalizzazione è annuale, dopo un anno il denaro depositato su un conto risulta moltiplicato per $1+r$. Il secondo anno cresce di un'ulteriore fattore $(1+r)^*(1+r)=(1+r)^2$.
Dopo n anni il conto sarà salito a $(1+r)^n$ volte il valore originario. L'espressione analitica della crescita di un conto al quale è applicata la *LEGGE DELL'INTERESSE COMPOSTO,* data la sua forma di potenza n-sima, si dice che esprime una *CRESCITA GEOMETRICA.*

$t_0 \rightarrow V_0$

$t_1 \rightarrow V_1= V_0^*(1+r)$

$t_2 \rightarrow V_2= V_1^*(1+r)=V_0^*(1+r)(1+r)=V_0(1+r)^2$

.

.

.

$t_n \rightarrow V_n= V_{n-1}^*(1+r)=V_0^*(1+r)^{n-1}(1+r)=V_0(1+r)^n$

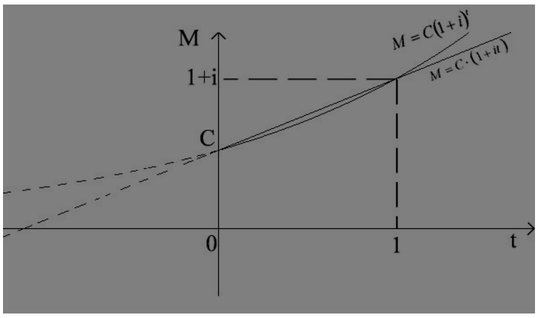


Grafico 2

Possiamo quindi notare come l'interesse non sia calcolato su V_0 ma sulla somma appena precedente.
In generale dopo un tempo t (anni) il valore del conto è $V_t=V_0*(1+r)^t$.
Nella rappresentazione delle curve dei valori è possibile notare come l'interesse semplice determini una crescita lineare nel tempo del valore del conto mentre l'interesse composto una crescita accelerata di tipo *geometrico.*

1.4 REGOLA DEL 7-10 (*DIMOSTRAZIONE RICHIESTA ALL'ESAME)*

In presenza di regime di capitalizzazione con legge degli interessi composti con accredito annuale ci possiamo chiedere quanto impiego per ottenere il doppio del valore V_0=***C (Capitale Attuale)***

- $V_t=V_0*(1+r)^t$ *=> Sostituisco il membro di sinistra con* $2V_0$
- $2V_0=V_0*(1+r)^t$ *Elimino il* V_0 *ad entrambi i membri perché divido per la stessa quantità l'equazione sia a sinistra che a destra =>*
- $2=(1+r)^t$ *Esprimo in forma logaritmica l'equazione per abbassare il "t" dall'esponente alla base come da proprietà dei logaritmi =>*
- $\ln 2=t*\ln(1+r)$ =>
- $t=\ln 2/\ln(1+r)$

Dal momento che il $\ln(2)\approx 7/10$ *e che, dato lo sviluppo di Taylor al primo ordine per cui il* $\ln(1+r)\approx r$ possiamo concludere che:

- $t \approx (7/10)*(1/r)$

Se r=10% => $t \approx (7/10)*(1/0,1)$ => $t \approx 7$

se r=7% => $t \approx (7/10)*(1/0,07)$ => $t \approx 10$

Regola: "*Una somma di denaro investita al 7% annuo raddoppia in circa 10 anni mentre una somma investita al 10% annuo raddoppia in circa 7 anni*".

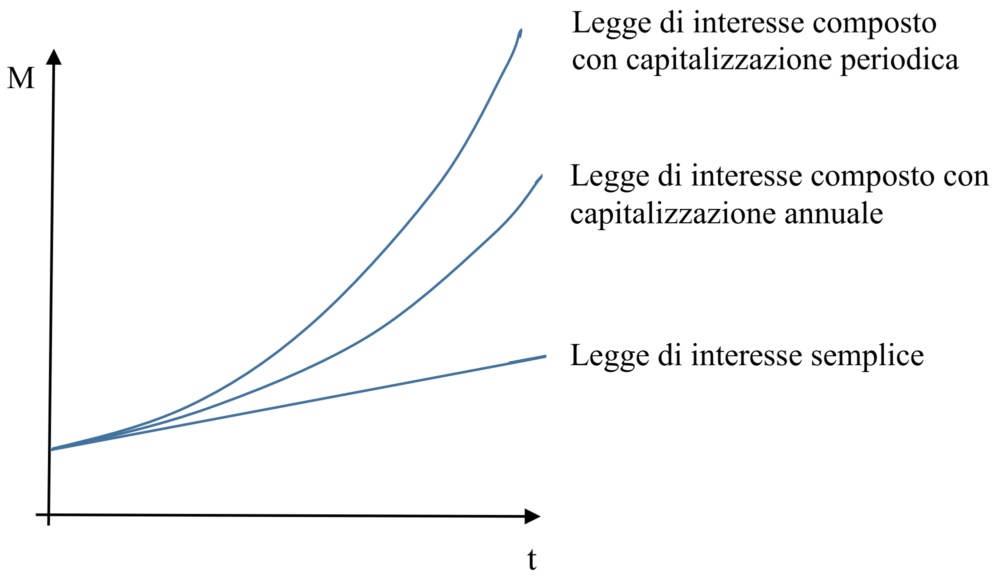
1.5 LEGGE DELL'INTERESSE COMPOSTO CON CAPITALIZZAZIONE PERIODICA

Non sempre l'interesse è calcolato versando sul conto ogni anno anzi nella maggior parte dei casi si calcola e si paga l'interesse con frequenza maggiore che può essere trimestrale, mensile, giornaliera. La capitalizzazione può avvenire con qualsiasi frequenza e il metodo generalmente consiste nel suddividere un anno in un numero stabilito di periodi uguale alla durata (***m*** periodi). Se ***r*** è il tasso d'interesse nominale, il tasso d'interesse per ciascuno degli ***m*** periodi è ***r/m.*** In un periodo il conto cresce di $(1+r/m)$ e dopo un anno composto da ***m*** periodi l'incremento è di $(1+r/m)^m$.
In generale dopo un tempo ***t*** *(anni)* con capitalizzazione periodica *(m)* vale

$$V_t=V_0*(1+r/m)^{t*m}$$

Come si può notare confrontando questa formula $V_t=V_0*(1+r/m)^t$ con la precedente è evidente che differisce del fattore all'esponente pari al frazionamento. Tanto maggiore sarà il frazionamento, tanto maggiore sarà l'esponente al quale dovrò elevare il binomio $(1+r/m)$ questa intuizione ci anticipa che la legge dell'interesse composto con capitalizzazione continua è quella che genera il maggior valore futuro ***(per t >1)*** perché genera interessi che subito vengono messi a frutto ***(capitalizzati)*** . Tale differenza comporta che:

legge dell'interesse composto con capitalizzazione periodica $[V_t=V_0*(1+r/m)^{t*m}]$ **>**
legge dell'interesse composto con capitalizzazione annuale $[V_t=V_0*(1+r/m)^t]$ **>**
legge interessi semplice o lineare $[V_t=V_0*(1+rt)]$



1.6 TASSO D'INTERESSE EFFETTIVO ED EQUIVALENZA DEI TASSI (*FORMULA RICHIESTA ALL'ESAME)*

Il tasso d'interesse effettivo ***(r_e)*** è quel tasso d'interesse annuo che produce lo stesso risultato di un differente tasso di interesse ***(tasso nominale)*** con capitalizzazione periodica.
Se ad esempio il tasso d'interesse nominale è $r=8\%$ con capitalizzazione periodica semestrale $m=2$ allora sappiamo dopo ***t anni*** che il valore sarà $V_t=V_0*(1+r/m)^{t*m}$. Nel caso invece di capitalizzazione annuale avremo che $V_t=V_0*(1+r/m)^t$. Dato che vogliamo che il tasso d'interesse di quest'ultima renda equivalenti i valori prende il nome di tasso d'interesse effettivo r_e allora

- $V_0*(1+r/m)^{t*m}= V_0*(1+r_e)^t$ *Elimino il* V_0 *ad entrambi i membri perché divido per la stessa quantità l'equazione sia a sinistra che a destra ed elimino il temine **t** all'esponente perchè presente ad entrambi i membri*
- $(1+r/m)^m= (1+r_e)^t$
- *esplicitando il termine* r_e *ottengo l'equazione seguente:*

$r_e= (1+r/m)^m-1$ *che con i nostri dati equivale a 8,16%*

Un tasso di interesse nominale dell'8% con accredito semestrale corrisponde ad un tasso dell'8,16% annuo con accredito annuale.

ESEMPI

Calcolare il tasso d'interesse nominale con capitalizzazione composta e accredito degli interessi m volte l'anno corrispondente ad un tasso effettivo r_e.

(Dati $r_e=10\%$; $m=3$-$m=12$-$m=\infty$)

La formula da utilizzare è la $r_e= (1+r/m)^m-1$ *ma esplicitando l'**r** all'interno della parentesi giungendo alla formula* $r=[(1+r_e)^{1/m}-1]*m$ *dove il termine* $(1+r_e)^{1/m}$ *sta ad indicare la radice m-esima del binomio* $(1+r_e)$

- ***m=3 => r=0.0968 => r=9.68%***
- ***m=12 => r=0.0957 => r=9.57%***

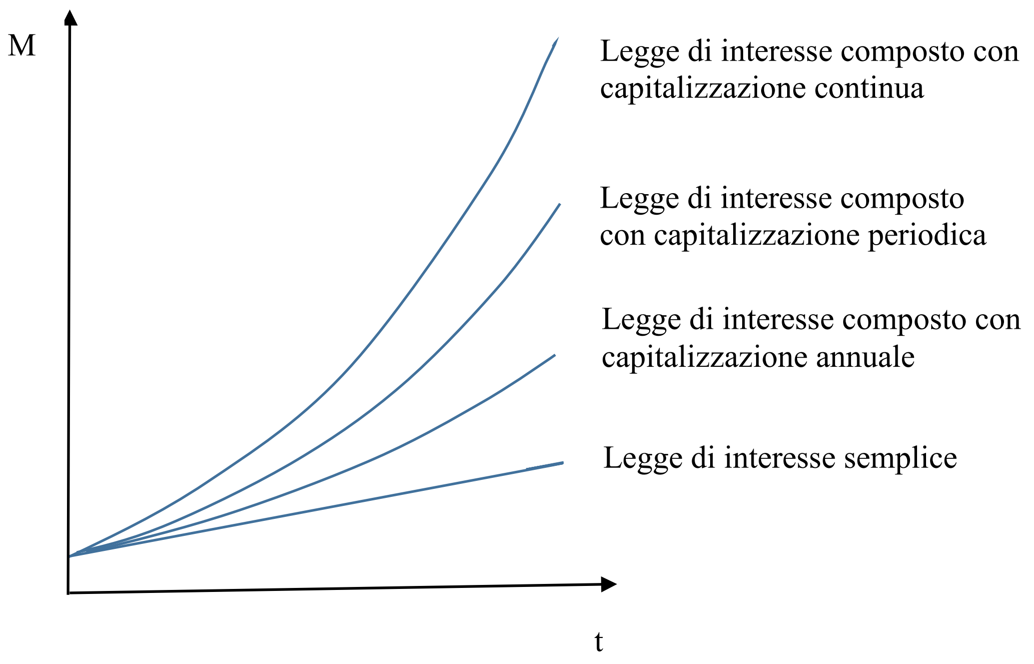
– $m=\infty \Rightarrow \lim_{m\to\infty} [(1+re)^{1/m}-1]*m \Rightarrow r=\ln(1+r_e)$ *risultato di un limite notevole*

1.7 CAPITALIZZAZIONE CONTINUA

Immaginiamo di suddividere l'anno in periodi sempre più piccoli e di applicare la capitalizzazione istantaneamente questo conduce all'idea di capitalizzazione continua. Per determinare l'effetto della capitalizzazione continua consideriamo il limite dell'usuale capitalizzazione al tendere all'infinito del valore ***m*** di periodi in un'anno.

$\lim_{m\to\infty} V_0*[(1+r/m)^{mt}] = V_0*\lim_{m\to\infty} (1+r/m)^{mt} = V_0*e^{rt}$ *risultato di un limite notevole*

Questo risultato è generato dopo un tempo ***t*** con un tasso d'interesse pari a ***r*** in capitalizzazione continua.



1.8 VALORE ATTUALE

Sappiamo che il denaro investito oggi raggiunge un valore maggiore nel futuro per effetto dell'interesse. Possiamo invertire questo concetto rispetto al tempo per calcolare il valore da assegnare oggi, nel presente, a una somma di denaro che verrà ricevuta in un momento successivo, è questa l'essenza del concetto di *valore attuale.*Una simile trasformazione si applica agli impegni futuri come la restituzione del debito: calcolare il valore attuale del debito significa determinare quanto denaro sarebbe necessario *oggi* per poterlo saldare.
La valutazione dei debiti futuri in termine di valore attuale equivalente è detta anche *sconto.*
Perchè il valore attuale di un importo monetario futuro è minore del valore nominale di tale importo, allora il valore futuro dev'essere scontato per ottenere il valore attuale e il fattore per cui il valore futuro deve esser scontato è detto *fattore di sconto o fattore di attualizzazione* $[(1+rt)^{-1}]$*e*

dipende dalla particolare *legge di capitalizzazione* adottata:

Legge di Capitalizzazione Semplice
$V_t=V_0*(1+rt) \Rightarrow V_0=V_t*(1+rt)^{-1}$

Legge dell'interesse Composto con Capitalizzazione ad Accredito Annuale
$V_t=V_0*(1+r)^t \Rightarrow V_0=V_t*(1+r)^{-t}$

Legge dell'interesse Composto con Capitalizzazione ad Accredito Periodico
$V_t=V_0*[(1+r/m)^{t*m}] \Rightarrow V_0=V_t*[(1+r/m)^{-t*m}]$

Legge dell'interesse con Capitalizzazione Continua
$V_t=V_0*e^{rt} \Rightarrow V_0=V_t*e^{-rt}$

1.9 VALORE ATTUALE E VALORE FUTURO PER SUCCESSIONI DI FLUSSI DI CASSA

L'analisi che abbiamo condotto sull'effetto dell'interesse per un singolo deposito o prestito può essere estesa al caso in cui vi siano più flussi di cassa in momenti diversi ovvero si abbia una successione di flussi di cassa.
La *Banca Ideale* è la banca che (1) applica lo stesso tasso d'interesse tanto ai depositi quanto ai prestiti (2) non addebita spese per il servizio e non applica commissioni alle transazioni (3) il tasso d'interesse è il medesimo per capitali di qualsiasi entità. Ciò però non implica che i tassi d'interesse sono identici per tutte le transazioni e si potrebbe perciò avere che un deposito di durata maggiore offra un tasso d'interesse maggiore rispetto ad uno di durata inferiore. Se però la banca ha un tasso d'interesse *indipendente dalla durata del periodo a cui si applica* e se capitalizza secondo le usuali leggi, questa è detta *Banca Ideale Costante* e rappresenta il punto di riferimento per descrivere il mercato monetario pubblico.

1.10 VALORE FUTURO (a)

Scegliamo la durata del ciclo di capitalizzazione e stabiliamo che un periodo abbia durata corrispondente a quella di questo ciclo. Assumiamo inoltre che al termine di ciascun periodo si verificano dei flussi. Depositeremo immediatamente ciascun flusso ricevuto in una banca ideale costante (se il flusso è negativo lo copriremo ricevendo un prestito). Grazie alla definizione di *Banca Ideale Costante,* il saldo finale del conto può essere determinato combinando i risultati dei singolo flussi.
Consideriamo la successione di flussi $(X_0, X_1, ..., X_n)$: dopo n periodi il pagamento iniziale X_0 sarà salito a $X_0*(1+r)^n$ con r tasso d'interesse per periodo. Il successivo flusso X_1 del primo periodo sarà depositato sul conto per il restante tempo $n-1$ periodi e avrà un valore pari a $X_1*(1+r)^{n-1}$; il flusso X_2 frutterà interessi per gli $n-2$ periodi rimanenti pari a $X_2*(1+r)^{n-2}$. Il flusso finale X_n non frutterà alcun interesse rimanendo così X_n.
In generale:" Data la successione di flussi di cassa $(X_0, X_1, ..., X_n)$ ed il tasso di interesse r per ciascun periodo il valore futuro della successione è:
$VF(\underline{x},\underline{t})= X_0*(1+r)^n+X_1*(1+r)^{n-1}+X_2*(1+r)^{n-2}+.....+ X_n$
ovvero dato un *Cash Flow* $(\underline{x},\underline{t})$ in valore futuro in T sarà dato da:
$VF_T= x_0*m(t_0,T)+x_1*m(t_1,T)+x_2*m(t_2,T)+.....+ x_n*m(t_n,T)$

con $m(t_0,T)=(1+r)^{[T-t(zero)]}$, $m(t_1,T)=(1+r)^{[T-t(uno)]}$

1.11 VALORE FUTURO (b)

Anche il valore attuale di una generica successione dei flussi di cassa può essere calcolato valutando separatamente ciascun flusso. Consideriamo la successione di flussi $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. Il valore attuale del primo flusso X_0 è semplicemente il valore stesso; il valore attuale del flusso X_1 è $X_1/(1+r)$ perchè dev'esser scontato o attualizzato per un periodo e così via per tutte le altre poste.
In generale: Data la successione di flussi di cassa $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ e il tasso d'interesse r per ciascun periodo, il valore attuale della successione è
$VA= X_0+X_1/(1+r)+X_2/(1+r)^2+\ldots+ X_n/(1+r)^n$
ovvero dato un *Cash Flow* $(\underline{x},\underline{t})$ in valore attuale in 0 sarà dato da:

$VA_0(\underline{x},\underline{t})= x_0*d(0,t_0)+x_1*d(0,t_1)+x_2*d(0,t_2)+\ldots+ x_n*d(0,t_n)$

$con\ d(0,t_0)=1/(1+r)^{t(1)}=(1+r)^{-t(1)}$

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

1.12 VALORE ATTUALE e BANCA IDEALE

Sappiamo che è possibile usare una *Banca Ideale* per modificare una successione di flussi di cassa; una banca che applica il tasso del 10% può trasformare la successione *(1,0,0)* in *(0,0,1.21)* ricevendo cioè un deposito di 1€ e restituendo capitale e interessi per un totale pari a 1.21€ tra due anni.
In generale se una banca può trasformare un *Cash Flow* $\underline{X}=(x_0,x_1,x_2,.....,x_n)$ in un altro *Cash Flow* $\underline{Y}=(y_0,y_1,y_2,.....,y_n)$ allora può operare anche la trasformazione inversa.
Due successioni o *Cash Flow* che possono essere trasformate l'una nell'altra si dicono ***equivalenti (RICHIESTA ALL'ESAME)***

Consideriamo ad **esempio** il seguente *Cash Flow:*

$\underline{X}=(100,0,0)$ *(detenere oggi 100€)*

$\underline{Y}=(0,110,0)$ *(investo 100€ oggi e ottengo 110 l'anno successivo)*

$\underline{Z}=(0,10,110)$ *(investo 100€ oggi, ottengo 10 l'anno successivo mantenendo 100€ investite e ottengo 110 al terzo anno)*

Possiamo cioè eseguire delle operazioni di investimento che li porti ad essere considerati equivalenti . Abbiamo ottenuto i diversi *Cash Flow* attraverso la somma vettoriale perchè giustamente il *Cash Flow* è descritto da uno specifico scadenziario $(\underline{x},\underline{t})=(x_0,x_1,x_2,x_n)/(t_0,t_1,t_2,t_n)$ occorre tenere a mente che i diversi *Cash Flow* sono vettori quindi è possibile esprimere delle loro **COMBINAZIONI LINEARI** $\underline{x}+\underline{y} \Rightarrow \alpha\,\underline{x}+\beta\,\underline{y}=(\alpha\,x_1+\beta\,y_1,\ \alpha\,x_2+\beta\,y_2,\ ....,\ \alpha\,x_n+\beta\,y_n)$.
Riguardo invece al calcolo del *VA* di un *Cash Flow* $\underline{x}$ in un generico istante *t allora sarà dato da:*

$$VA_t(\underline{x})=x_0*d(t,t_0)+x_1*d(t,t_1)+x_2*d(t,t_2)+.....+x_n*d(t,t_n)$$

con $d(t,t_n)=1/(1+r)^{t(n)-t}=(1+r)^{-[t(n)-t]}$
se $t_n>t$ => *Fattore di Sconto o Fattore di Attualizzazione*
se $tn<t$ => *Fattore Montante o Fattore di Capitalizzazione*

Consideriamo ad **esempio** il seguente *Cash Flow* $\underline{(K)}$ *ponendo di calcolarlo in* V_0:
$[\ \underline{K}=(0,-100,100)]$ *con* $r=10\%$

$VA_0(\underline{K})=0*d(0,0)+[-100*d(0,1)]+110*d(0,2)=0 \Rightarrow$
$VA_0(\underline{K})=0*(1+r)^0+[-100*(1+r)^{-1}]+110*(1+r)^{-2}=0 \Rightarrow$
mettendo in evidenza un termine pari a $(1+r)^{-1}$ *e ricordando che* $(1+r)^0=1$
$VA_0(\underline{K})=0*+(1+r)^{-1}*[-100+110*(1+r)^{-1}]=0 \Rightarrow$
$VA_0(\underline{K})=[-100+110*(1+r)^{-1}]=0$
Quest'ultima scrittura è utile se risulta scontare per un preciso istante di tempo offrendoci la possibilità di *scontare o attualizzare* ad un preciso istante *t* per poi *scontare o attualizzare* questo risultato in *0.*
Essendo possibile esprimere la combinazioni lineari di differenti *Cash Flow* allora avremo:
$VA(\alpha\,\underline{x}+\beta\,\underline{y})=\alpha\,VA(\underline{x})+\beta\,VA(\underline{y})$ ***[se β =-1 faccio la differenza]***

Ora sapendo dell'esempio sopra che il *Cash Flow* $\underline{x}$ può essere trasformato in $\underline{y}$ sommandoci $\underline{h}$ e cioè $\underline{y}=\underline{x}+\underline{h}$ ***allora*** $VA(\underline{y})=VA(\underline{x}+\underline{h})=VA(\underline{x})+VA(\underline{h})$

$\underline{x}=(100,0,0) \Rightarrow VA(\underline{x})=100$

***h*=(-100,110,0) => VA(*h*)= -100+100=0**

***y*=(0,110,0)**

VA(y)=VA(x)+VA(h) => 100=100+0

Cioè per ottenere un *Cash Flow* equivalente occorre sommarci un *Cash Flow* con *VA pari a 0.*
DEFINIZIONE:
Due flussi ***x* e *y*** sono *EQUIVALENTI* quando hanno lo stesso valore attuale **(DEFINIZIONE RICHIESTA ALL'ESAME)**

TEOREMA *(TEOREMA RICHIESTO ALL'ESAME)*

Due flussi ***x* e *y*** sono *EQUIVALENTI* se e solo se esiste un flusso ***h***, con ***VA(h) =0,*** tale che ***y*=*x*+*h***
DIMOSTARZIONE:

Se y e x sono equivalenti allora ***VA(x)=VA(y).*** Definisco ***h*** come ***y-x*** e cioè
h=y-x quindi ***VA(h)=VA(x)-VA(y)=0***
Supponiamo che ***h=y+x => VA(y)=VA(x)+VA(h)*** e *s*upponendo ***VA(h) =0 => VA(y)=VA(x)*** ergo sono *EQUIVALENTI*

DEFINIZIONE:

- Un flusso ***x*** è **EQUO** rispetto al tasso ***r*** se ***VA(x)=0***
- Un flusso ***x*** è **VANTAGGIOSO** rispetto al tasso ***r*** se ***VA(x)>0***
- Un flusso ***x*** è **SVANTAGGIOSO** rispetto al tasso ***r*** se ***VA(x)<0***

CONFRONTO TRA FLUSSO ***x*** E FLUSSO ***y***
1) Calcolo i *VA* nello stesso istante di tempo $VA_0(x)$, $VA_0(y)$
2) Confronto i *VA*

=> se $VA_0(x)=VA_0(y)$ i flussi sono equivalenti e quindi sono ***interscambiabili***
=> se $VA_0(x)>VA_0(y)$ i flussi ***non*** sono equivalenti ed il flusso ***x*** è preferibile al flusso ***y***. Quindi in termini ***attuariali*** Inoltre partendo da ***x*** posso combinare $VA_0(x)$ e$VA_0(y)$ come differenza e il restante trasformandolo in ***y***.
x,y $VA_0(x)>VA_0(y)$ considero un altro flusso $x'=(x_0-[VA_0(x)-VA_0(y)], x_1, x_2,...., x_n)$
allora $VA_0(x')=VA_0(x)-VA_0(x)+VA_0(y)=VA_0(y)$ cioè ***x' e y*** sono
se $VA_0(x)<VA_0(y)$ ***=> conviene prendere y*** e fare la stessa cosa di prima con ***x***.

1.13 METODO DEL CALCOLO Valore Attuale PER FLUSSI DI CASSA A RATA COSTANTE *(RICHIESTO ALL'ESAME)*

Dato un *Cash Flow* del tipo ***(R, R, R, R,......, R)/(0, 1, 2,.......,n)*** allora il valore attuale per tale flusso può essere calcolato come $VA_0= R+R*(1+r)^{-1}+ R*(1+r)^{-2}+.....+ R*(1+r)^{-n}$ e definendo $d=(1+r)^{-1}$ $VA_0= R+R*d+ R*d^2+.....+ R*d^n$ o ancora

$$VA_0= R+R\sum_{k=1}^{n} d^k$$

Il termine

$$dS_n=\sum_{k=1}^{n} d^{k+1}$$ sottraggo la seconda serie alla prima

$$S_n-dS_n=\sum_{k=1}^{n} d^k-\sum_{k=1}^{n} d^{k+1}$$

$$S_n(1-d)= d- d^{n+1}$$

$$S_n(1-d)= d*(1-d^n)$$

$S_n= d*(1-d^n)/(1-d)$ ricordando che $d/(1-d)=1/r \Rightarrow S_n=(1-d^n)/r \Rightarrow VA_0= R+R*(1-d^n)/r$
il termine moltiplicativo $(1-d^n)/r=a_{n\neg i}=[1-(1+i)^{-n}]/i$

Se il *Cash Flow è* del tipo ***(0, R, R, R,......, R)/(0, 1, 2,.......,n)*** allora avremo che il $VA_0=R*a_{n\neg i}$ con $a_{n\neg i}=(1-d^n)/r$ con la seguente relazione tra d e r :

$d = 1/(1+r) \Leftrightarrow r=1/(d -1)$

Se ci viene fornito un tasso annuo r_a ma il pagamento avviene attraverso rate biennali e cioè avremo il seguente *Cash Flow* ***(0, 0, R, 0, R, 0, R,......, R)/(0, 1, 2,3, 4, 5, 6, 7,.......,n)***
allora in questo caso avremo $d = 1/(1+r)^{-2}$
con $r=1/d -1$ pari al tasso periodale con capitalizzazione periodale
Quando ora otteniamo r applico la formula generale per il valore attuale $VA_0=R*a_{n\neg i}$
Se ci viene fornito un tasso r_a annuo ma il pagamento avviene attraverso rate mensili avremo il seguente *Cash Flow* ***(0, R, R, R, R, R, R,......, R)/(0, 1/12, 2/12, 3/12, 4/12, 5/12, 6/12, 7/12,.......,n)***
allora in questo caso avremo $d=[1+r_a/(1/12)]^{-(1/12)}$ con $r=1/d -1$ potendo così ora applicare $VA_0=R*a_{n\neg r}$

1.14 VALUTAZIONE E PROPOSTE D'INVESTIMENTO – CRITERI

– **V.A.N. (Valore Attuale Netto)** ***(RICHIESTO ALL'ESAME)***

Consente di valutare le alternative classificandole in base ai rispettivi valori attuali; se si tratta quindi si una proposta di investimento più il VAN è alto più l'alternativa è vantaggiosa, mentre invece in caso contrario, ad esempio nel caso di una restituzione di un debito, l'alternativa più vantaggiosa sarà quella con VAN inferiore. Questo criterio è piuttosto convincente e viene considerato come la migliore misura della bontà di un investimento; ha infatti il vantaggio che i valori attuali di investimenti diversi possono essere sommati ottenendo un dato aggregato significativo e questo perchè il VA di una somma di successioni di flussi di cassa è uguale alla somma dei valori attuali dei corrispondenti flussi.

– **T.I.R. (Tasso Interno di Rendimento)** ***(RICHIESTO ALL'ESAME)***

Il procedimento logico che è dietro il criterio del TIR è che più è alto il Tasso Interno di

Rendimento e più attraente è l'investimento: un potenziale investimento o progetto non è presumibilmente degno di essere considerato a meno che il suo Tasso Interno di Rendimento sia maggiore del Tasso di Interesse Prevalente (Praticato dalla Banca Ideale). Il TIR è un concetto di flussi di cassa (x_0,x_1,x_2,x_n) associato ad un investimento; il valore attuale per tale flusso sarà

$$VA=\sum_{k=0}^{n} x_k/(1+r)^k$$

Esempio:

Se l'investimento che corrisponde a tale successione è realizzato con una serie di depositi e prelievi da una banca ideale con tasso d'interesse *r,* allora per il teorema del valore attuale il VA è pari a *zero.*
L'idea alla base del tasso interno di rendimento ribalta tale procedura.
Data una successione di flussi di cassa, si scrive l'espressione del suo valore attuale e poi si determina il valore *r* chiamato Tasso Interno di Rendimento, poiché è quel tasso di interesse determinato dalla struttura interna della successione.

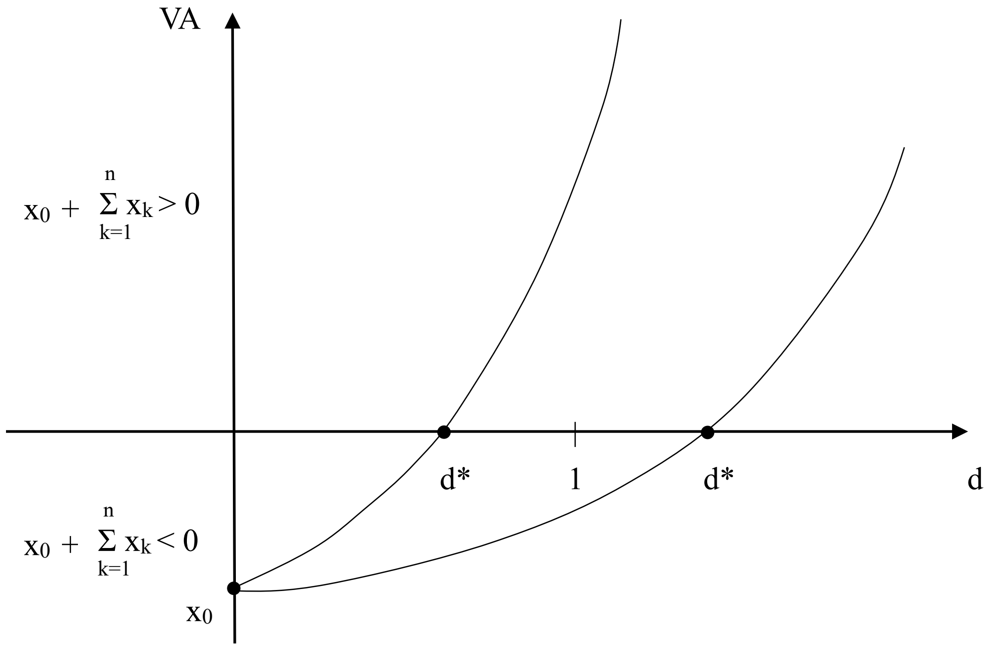
IN GENERALE [TEOREMA FONDAMENTALE DEL TASSO INTERNO DI RENDIMENTO]:

Data una successione di flussi di cassa $(x_0,x_1,x_2,......,x_n)$ il tasso interno di rendimento di questa successione è il valore *r* che soddisfa l'equazione $\{X_0+[X_1/(1+r)]+[X_2/(1+r)^2]+.....+[X_n/(1+r)^n]\}=0$ e cioè quel valore di *r* che soddisfa $1/(1+r)=d \Rightarrow 1/d-1$ dove *d* soddisfa l'equazione polinomiale $X_0+d*X_1+d^2*X_2+.....+d^n*X_n=0$.
Possiamo notare come il tasso interno di rendimento sia definito senza alcun riferimento ad un tasso d'interesse prevalente ma sia determinato unicamente dai flussi di cassa della successione.
L'equazione $X_0+d*X_1+d^2*X_2+.....+d^n*X_n=0$ del TIR è un'equazione polinomiale in *d* di grado *n* che in generale non ha soluzione analitica ed è noto come un tale tipo di equazione abbia da un minimo di *1* ad un massimo di *n* radici o soluzioni.
Per la forma più comune di investimento, quella costituita da un esborso iniziale seguito da più pagamenti positivi <u>**esiste sempre un'unica soluzione positiva.**</u>

Inoltre se $x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k > 0$ (cioè l'importo totale restituito supera l'investimento iniziale) allora il

TIR corrispondente è positivo, perché $0 < d < 1$ e sappiamo che $r = 1/d - 1$

Se $x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k < 0$ allora il TIR sarà negativo perché $d^* > 1$ e $r^* = 1/d^* - 1 < 0$



ESERCIZI PROPOSTI

- ***ESERCIZIO 1***

Testo

Data la struttura dei fattori di sconto a pronti d(0, 1), d(0, 2), d(0, 3), d(0.4) (dove il tempo è espresso in anni), calcolare

1. ***Il prezzo a pronti e a termine con scadenza in t = 1 del flusso x/t = {10, 10,110}/{2,3,4}***
2. ***L'importo R per cui il flusso x/t = {-100, R, R}/{1,2,3}***
   è equo (cioè ha valore nullo) in t=0
3. ***Il TAN che deve avere un titolo che paga cedole annuali e durata 3 anni per quotare sopra la pari.***

[Dati: d(0, 1) = 0.98, d(0, 2) = 0.97, d(0, 3) = 0.96, d(0.4) = 0.955]

Svolgimento

1. V_0=10*d(0, 2)+10*d(0, 3)+110*d(0.4) => V_0=10*0.97+10*0.96+110* 0.955 => V_0=97+96+105.5 => V_0=298.05

Basta prendere tale risultato e capitalizzarlo per un periodo => F= V_0/d(0;1) o F= V_0*(1+r) nel nostro esempio dal momento che l'esercizio ci fornisce direttamente il fattori di sconto o attualizzazione utilizziamo la prima formula F= V_0/d(0;1)

2. Risolvere rispetto ad *R:*

-100*d(0, 1)+ R*d(0, 2)+R*d(0, 3)=0 => R=[100*d(0, 1)]/[d(0, 2)+d(0, 3)] => R=98/1.93 => R=50.77720207

3. Calcoliamo il tasso di parità isolando la I:

I*d(0, 1)+I*d(0, 2)+(I+C)*d(0, 3)=C => I=C*[1-d(0, 3)]/[d(0, 1)+d(0, 2)+d(0, 3)]
=> I/C=[1-d(0, 3)]/[d(0, 1)+d(0, 2)+d(0, 3)] => I/C=0.04/2.91 => I/C=0.013745704
Se il TAN è maggiore di I/C il titolo quota sopra la pari.

- ***ESERCIZIO 2 (Multiple Choice) [Risposta esatta in neretto]***

Secondo il criterio del VAN, tra due investimenti si sceglie

***(a)* sempre quello con il VAN maggiore**
(b) quello con il VAN maggiore, se anche il TIR è maggiore
(c) quello con il VAN maggiore, ma solo se il TIR non è minore

- ***ESERCIZIO 3***

Testo
***Considerare i flussi*:**

V=(-a, 2a)/(0, 2)
W=(-a, 1.5a)/(0, 1)

dove a è un importo positivo ed il tempo è misurato in anni.

1. ***Determinare per quali valori del tasso annuale r il flusso V risulta preferibile al flusso W secondo il criterio del VAN.***
2. ***Determinare i tassi interni di rendimento r_v e r_w dei due flussi.***
3. ***In quali casi il VAN ed il TIR danno risposte differenti?***

[Dati: a=180]

Svolgimento

1. V è preferibile a W se $-a+2a*(1+r)^{-2}> -a+1.5a*(1+r)^{-1}$

quindi se $2a*(1+r)^{-2}> 1.5a*(1+r)^{-1}$ => $2=1.5*(1+r)^{-1} / (1+r)^{-2}$ => $2/1.5=(1+r)^{-1}*(1+r)^{2}$ =>
2/1.5=1+r => r = 1/3

2. $-a+2a*(1+r_v)^{-2}=0$ => $-1+2*(1+r_v)^{-2}=0$ => $[(1+r_v)^{-2}]^{(-1/2)}=[1/2]^{(-1/2)}$ => $r_v=\sqrt{2}-1$

$-a+1.5a*(1+r_w)^{-1}=0$ => $-1+1.5*(1+r_w)^{-1}=0$ => $(1+r_w)=1.5$ => $r_w=1.5-1$ => $r_w=0.5$
$r_w=0.5 > r_v=\sqrt{2}-1$

3. Secondo il criterio del TIR W è preferibile a V, quindi dal punto 1 sappiamo che il VAN da una risposta differente se e solo se r≥1/3

- ***ESERCIZIO 4***

Testo
Data la struttura dei fattori di sconto o di attualizzazione a pronti d(0, 1), d(0, 2), d(0, 3), d(0.4) (dove il tempo è espresso in anni), si vuole rimborsare D con 4 rate annuali, costanti e posticipate

di importo R. Determinare R.

[Dati: d(0, 1) = 0.98, d(0, 2) = 0.97, d(0, 3) = 0.96, d(0.4) = 0.955 e D=160.000]

Svolgimento

R=D/[(d(0, 1)+d(0, 2)+d(0, 3)+d(0.4)] => R= 160.000/3.865 => R=160000/3.865 =>
R=41397.1539

- ***ESERCIZIO 5***

Testo
Considera il flusso di cassa {-50, -70, x, 115}/{0,2,4,5}
dove il tempo è misurato in anni. Se il TIR è r, quanto vale x?

[Dati: r=20%]

Svolgimento

$-50 -70*(1+r)^{-2}+x*(1+r)^{-4}+115*(1+r)^{-5}=0 \Rightarrow x= [-50 -70*(1+r)^{-2}+115*(1+r)^{-5}]/(1+r)^{-4} \Rightarrow$
$x= -50*(1+r)^{4}-70*(1+r)^{2}+115*(1+r)^{-1} \Rightarrow x=108.6466667$

- ***ESERCIZIO 6***

Testo
Consideriamo una legge di capitalizzazione degli interessi composti, con tasso annuo i:
1. ***Per quale valore di i un capitale raddoppia in 4 anni?***
2. ***Se i=8%, quanto tempo occorre aspettare perchè un capitale triplichi?***

Svolgimento

1. $M=(1+i)^4*C$ poniamo M=2C => $2C=(1+i)^4*C$ eliminiamo il fattore C ad entrambi i membri => $2=(1+i)^4 \Rightarrow 2^{1/4}=1+i \Rightarrow i= 2^{1/4}-1$
2. $M=(1+i)^t*C$ poniamo M=3C => $3C=(1+i)^t*C$ eliminiamo il fattore C ad entrambi i membri => $3=(1+i)^t$ applichiamo il Logaritmo Naturale (ln) ad entrambi i membri per abbassare l'esponente alla base e isolare la *t* => ln3=-t*ln(1+i) porto al primo membro il valore "-1" rendendo positivo il secondo membro => -ln3=t*ln(1+i) => $\ln3^{-1}= t*\ln(1+i)$ => ln(1/3)=t*ln(1+i) => t=[ln(1/3)]/ln[1+i] => t=1.098612289/0.076961041 => t=14.27491462

- ***ESERCIZIO 7 (<u>Multiple Choice</u>) [Risposta esatta in neretto]***

La successione di flussi di cassa ($x_0,x_1,x_2,......,x_n$) con x_0<0 (uscita) e x_k ≥ 0 ha TIR=q.
Il VAN calcolato rispetto a un tasso r<q è

1. Positivo per *n* pari, negativo per *n* dispari
2. **Sempre positivo**

3. Negativo per *n* pari, positivo per *n* dispari
4. sempre negativo
5. dipende da *q*

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

- ***ESERCIZIO 8***

Testo

Dimostrare che, se il tasso di interesse annuo r, il valore attuale di una rendita perpetua che paga cedola costante I ogni anno è I/r

Svolgimento

$$V_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (1+r)^{-k} * I \text{ quindi:}$$

$$V_0 = (1+r)^{-1} * I + (1+r)^{-1} * V_0 \text{ cioè } V_0 * (1+r) = I + V_0 \Rightarrow V_0 = I/r$$

- ***ESERCIZIO 9***

Testo

Un macchinario ha un costo di acquisto di C euro e per i successivi 12 anni, a partire dalla fine del primo anno, il suo utilizzo genererà un ricavo di X euro.

1. ***Determinare il valore annuale A dell'interno progetto di investimento rispetto ad un tasso r.***
2. ***Qual è il valore minimo m del ricavo annuo l'investimento risulti conveniente?***

[Dati: C=150000, X=30000, r=15%]

Svolgimento

1. $(X-A)*a_{12\neg r}=C \Rightarrow A= -(C*i)/[1-(1+i)^{-12}] + X \Rightarrow A= -[(150000*0.15)/(1-(1+ 0.15)^{-12})]+ 30000 \Rightarrow$
   $A=(22500/0,813092849)+30000 \Rightarrow A=57672.11645$
2. $m=C/a_{12\neg r}$ è il valore minimo che rende il valore annuale positivo
   $m= 150000/5.420618999$

- ***ESERCIZIO 10***

Testo

La costruzione di un tratto autostradale ha un costo iniziale di 10 milioni di €. La società realizzatrice richiede un finanziamento per coprire completamente tale costo, essendo disposta a pagare rate annuali non superiori a K milioni di €, ad un tasso annuo i.

1. ***Quanti anni N sono necessari per rimborsare il debito con un rimborso a rata costante? Qual è l'importo della rata R?***
2. ***Riportare la prima quota capitale C_1 e quota interessi I_1.***

[Dati: K=2500000, r=12%, D=10000000]

Svolgimento

1. Sia $D=[(1-d^x)/i]*K \Rightarrow D/K=(1-d^x)/i \Rightarrow (D/K)*i=(1-d^x) \Rightarrow [(D/K)*i]-1= -d^x \Rightarrow$

$1-[(D/K)*i]= d^x \Rightarrow \ln[1-[(D/K)*i]]=\ln d^x \Rightarrow \ln[1-[(D/K)*i]]=x*\ln d \Rightarrow x=\ln[1-[(D/K)*i]]/\ln d$
$\Rightarrow x=\ln[1-[(10/2.5)*0.12]]/\ln(0.892857142) \Rightarrow x=5.770176016$

$d=1/(1+i) \Rightarrow d=1/(1+0.12) \Rightarrow d=1/(1+0.12) \Rightarrow d=0.892857142$

Allora il numero N è uguale al più piccolo numero intero maggiore di X.
La rata R si ottiene con $R=D/a_{N|i} \Rightarrow R=(D*i)/(1-d^N) \Rightarrow$
$R=(10000000*0.12)/(1-0.892857142^{\wedge}5.770176016) \Rightarrow R=1.200.000/0.48 \Rightarrow R=2500000$

2. $I_1=i*D \Rightarrow I_1= 0.12* 10000000 \Rightarrow I_1= 0.12* 10000000 \Rightarrow I_1=1200000$

C_1=R-I_1 => C_1=R-I_1 => C_1=2500000-1200000 => C_1=1300000

- **ESERCIZIO 11**

Testo
***Data la struttura dei fattori di sconto a pronti* d(0, 1), d(0, 2), d(0, 3), d(0.4) (dove il tempo è espresso in anni) calcolare**

1. ***Il prezzo a pronti e la duration del flusso***

x/t=(10,0,110)/(2,3,4)

2. ***L'importo I per cui il flusso***

x/t=(-1000, I, I, 1000+I)/(0,1,2,3)

è equo (cioè ha valore nullo) in t=0

3. Il TAN che deve avere un titolo che paga cedole annuali e matura tra 3 anni per quotare sotto la pari

DATI [d(0, 1) = 0.98, d(0, 2) = 0.97, d(0, 3) = 0.96, d(0.4) = 0.955]

Svolgimento

1. Prezzo a pronti

V_0=10*d(0, 2)+110*d(0.4) =>V_0=10*0.98+110*0.955 => V_0=

Duration

D_0=[10*2*d(0, 2)+110*4*d(0.4)]/V_0

2. Risolvo rispetto a I:

-1000+I*d(0,1)+I*d(0,2)+(1000+I)*d(0,3)=0

=> I={1000*[1-d(0,3)]}/[d(0,1)+d(0,2)+d(0,3)]

3. Il tasso di parità è j=I/1000

quindi ogni titolo con TAN<j quota sotto la pari

- **ESERCIZIO 12**

Testo
Una rendita perpetua posticipata con pagamenti SEMESTRALI si importo A viene acquistata ad un prezzo P, qual è il TIR annuo dell'operazione finanziaria?

DATI [A=20, P=300]

Svolgimento

$P=A/i$ => $i_s=A/P$ in questo modo calcolo il TIR semestrale => $i_s=0.06666666$

$i=(1+i_s)^2-1$ TIR annuo calcolato utilizzando la formula dell'uguaglianza dei tassi $[(1+r/m)^m= (1+r_e)^t]$ => $i=(1+0.06666666)^2-1$ => $i=0.137777777\sim 14\%$

- **ESERCIZIO 13**

Testo
Potete comprare uno smartphone pagandolo 550€ in contanti oppure 12 rate bimestrali posticipate di importo costante. Sia i il tasso annuo d'interesse, il pagamento rateale risulta conveniente, rispetto al criterio del VAN se l'importo della rata non supera il valore massimo x.

DATI [i=20%]

Svolgimento

$x=550/[a_{12\neg i(\text{semestrale})}]$ => dove $i_{\text{semestrale}}= i_2=(1+i)^{2/12}-1$ => $i_2=(1+i)^{1/6}-1$ => $i_2=0.03085332$

- **ESERCIZIO 14** ***(Multiple Choice) [Risposta esatta in neretto]***

Testo
Quale delle seguenti successioni di flussi di cassa ammette sicuramente un TIR positivo?

(a) (-100, 10, 10, 10, 60)/(0, 1, 2, 3, 4)
(b) (-100, 10, 10, 10, 60)/(0, 2, 4, 6, 8)
(c) (-100, 30, 20, 10, 60)/(0, 2, 5, 8, 11)
(d) Nessuna delle precedenti

- **ESERCIZIO 15** ***(Multiple Choice) [Risposta esatta in neretto]***

Testo
Considerare un flusso di pagamenti a rata costante annuale di durata N anni. Il valore del flusso rispetto ad un tasso annuo i > 0 …

(a) …è crescente rispetto ad N ed illimitato per N che tende a infinito
(b) …è crescente rispetto ad N ed limitato per N che tende a infinito
(c) …è decrescente rispetto ad N e tende a 0 per N che tende a infinito

- **ESERCIZIO 16** ***(Multiple Choice) [Risposta esatta in neretto]***

Testo
Sia C > 0. Quale tra i seguenti flussi di cassa ha TIR pari a 0?
(a) (-C, C, -(C + C/10), C + C/5) | (0, 1, 2, 3)
(b) (-C, C/2, C/3, C/4) | (0, 1, 2, 3)

(c) (-C/4, C/2, -C/4, C/4) | (0, 1, 2, 3)
(d) Nessuno dei precedenti

- ***ESERCIZIO 17***

Date le 2 operazioni finanziarie x|t = (-100, 1.5, 1.5, 1.5, 101.5)|(0, 0.25, 0.50, 0.75, 1) e y|t = (-C, 10, 100)|(0, 0.5, 1) determinare C tale che x|t e y|t abbiano lo stesso TIR

Svolgimento:

Il TIR di x|t è 6% perché x|t ha un flusso di cassa pari a un BTP con TAN = 6% quotato alla pari, quindi C si ricava come valore attuale di (10, 100)/(0.5, 1) al 6%

$$\mathbf{C = 10(1 + 0.06)^{-0.5} + 100(1 + 0.06)^{-1} = 104.05}$$

- ***ESERCIZIO 18 (Multiple Choice) [Risposta esatta in neretto]***

Considerando una banca che offre un conto corrente con TAN 8% e capitalizzazione degli interessi semestrale, il tasso di interesse effettivo è:

(a) Maggiore di 8%
(b) Minore di 8%
(c) Uguale a 8%
(d) Non è possibile calcolarlo

- ***ESERCIZIO 19 (Multiple Choice) [Risposta esatta in neretto]***

Per rimborsare un prestito di 10000 € in 10 rate anticipate al tasso 6% si deve pagare una rata pari a :

(a) 1000 €
(b) 1281.77 €
(c) 1358.68 €
(d) Nessuna delle precedenti

- ***ESERCIZIO 20***

La società Alpha sa di dover pagare sia tra 2 che tra 4 anni un importo di 1000 € e decide di coprirsi da eventuali variazioni dello stato del mercato, caratterizzato all'istante iniziale da una struttura piatta con tasso annuo i = 5%. Si supponga che sul mercato siano disponbili i seguenti titoli:

– ***BTP con scadenza a 2 anni, cedola annua e TAN = 7%***
– ***BTP con scadenza a 5 anni, cedola annua e TAN = 5%***

Determinare le quote a_1 e a_2 da investire rispettivamente nel BTP con scadenza 2 anni e nel BTP con scadenza 5 anni in modo che il flusso costituito delle attività e delle passività risulti

immunizzato.

Svolgimento:

Si ricavano valore attuale e duration del debito che ha flusso (-1000, -1000)|(2, 4):

$VA = 1000 \cdot (1 + i)^{-2} + 1000 \cdot (1 + i)^{-4} = 1729.73$

$D = [1000 \cdot 2(1 + i)^{-2} + 1000 \cdot 4(1 + i)^{-4}]/VA = 2.95$

Si ricavano prezzi e duration dei 2 BTP:

$P_1 = 100/(1 + 0.05)^2 + 7/0.05 \cdot [1 - 1/(1 + 0.05)^2] = 103.72$ $\qquad P_2 = 100$

$D_i = 1 + y/(my) - [1 + y + n (c - y)]/\{mc[(1 + y)^n - 1] + my$ =>

=> $D_1 = 1.94$ $\qquad D_2 = 4.55$

Risolvere quindi il Sistema

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = VA \\ w_1D_1 + w_2D_2 = D \end{cases} \qquad \text{Con } w_1 = V_1/VA \quad \text{e} \quad w_2 = V_2/VA$$

Quote $a_1 = V_1/ P_1 = 10$ e $a_2 = V_2/ P_2 = 7$ (arrotondate all'intero)

- ***ESERCIZIO 21 (Multiple Choice) [Risposta esatta in neretto]***

Dato un BTP con flusso di cassa (0, 3, 3, 3, 103)|(0, 0.5, 1, 1.5, 2) e prezzo 98.3, il tasso di rendimento a scadenza è:

(a) Maggiore di 6%
(b) Minore di 6%
(c) Minore di 3%
(d) Nessuna delle precedenti

- ***ESERCIZIO 22 (Multiple Choice) [Risposta esatta in neretto]***

Per quali delle seguenti operazioni finanziarie si può dire senza fare i calcoli che esiste il TIR?

(a) (-100, 25, 25, 25, 25)|(0, 1, 2, 3, 4)
(b) (-100, 30, 30, 30, 30)|(0, 1, 2, 3, 4)
(c) (0, 30, -30, 30, -30)|(0, 1, 2, 3, 4)
(d) Nessuna delle precedenti

- ***ESERCIZIO 23***

Date le seguenti operazioni finanziarie:
A: un esborso iniziale di 10000€ in cambio di entrate costanti annue perpetue di X = 700€
B: un esborso iniziale di 10000€ in cambio di incassi di 5000€ dopo 2, 4 e 6 anni.
Usando il tasso i = 6%, stabilire con il criterio del-Van quale operazione è da preferire.

Svolgimento:

$VAN_A = - 10000 + X/i = 1666.66$

$VAN_B = - 10000 + 5000(1 + i)^{-2} + 5000(1 + i)^{-4} + 5000(1 + i)^{-6} = 1935.25$

E' da preferire l'operazione B.

- ***ESERCIZIO 24***

Si vuole costituire un capitale C = 20000 tra n = 3 anni versando rate costanti mensili di importo R su un conto corrente che offre un tasso di rendimento effettivo annuo i = 6%. Determinare R.

Svolgimento:

Tasso mensile $i_{12} = (1 + i)^{1/12} – 1 = 0.49\%$

$\mathbf{R = C/S_{n\rceil\, i} = 20000/S_{36\rceil\, 0.49\%} = 509.65}$

- ***ESERCIZIO 25***

Le due successioni di flussi di cassa (-100, I, I, I, I, I, 100 + I)|(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) e (-C, 150)|(0, 5) (dove il tempo è espresso in anni) hanno lo stesso TIR. Calcolare il valore di C.
Dato: I = 5

Selezionare la risposta esatta:
(a) $0 \leq C < 70$
(b) $70 \leq C < 100$
(c) $\mathbf{100 \leq C < 120}$
(d) $120 \leq C < 140$

Svolgimento:

Il primo flusso rappresenta un titolo quotato alla pari, quindi il suo TIR è i = I/100, pertanto sarà

$\mathbf{C = 150(1 + i)^{-5} = 150(1 + I/100)^{-5} = 117.53}$

- ***ESERCIZIO 26***

Un progetto di investimento ha un VAN di V = 1300 €. Un progetto alternativo ha un costo iniziale di X = 150 €, durata 3 anni ed assicura il flusso (R, 2R, 3R)|(1, 2, 3), con R > 0. Sia i = 10% il tasso di valutazione annuo, determinare il valore di R che rende i due progetti equivalenti secondo il criterio del VAN.

Selezionare la risposta esatta:

(a) $300 \leq R < 310$
(b) $310 \leq R < 320$
(c) $320 \leq R < 330$
(d) $330 \leq R < 340$
(e) Nessuno dei precedenti

Svolgimento:

$d = (1 + i)^{-1}$

$V = -X + Rd + 2Rd^2 + 3Rd^3$ => $\mathbf{R = (V + X)/(d + 2d^2 + 3d^3) = 301.08}$

- ***ESERCIZIO 27***

Potete acquistare uno smartphone pagando 550 € in contanti oppure in 12 rate bimestrali posticipate di importo costante. Sia i = 20% il tasso annuo d'interesse, il pagamento rateale risulta conveniente, rispetto al criterio del VAN se l'importo delle rate non supera il valore massimo x.

(a) $45 \leq x < 51$
(b) $51 \leq x < 53$
(c) $53 \leq x < 55$
(d) $55 \leq x < 60$
(e) Nessuno dei casi precedenti

Svolgimento:

$\mathbf{x = 550/a_{12\rceil\, i'} = 55.53}$ dove $i' = (1 + i)^{1/6} - 1$

- ***ESERCIZIO 28 (<u>Multiple Choice</u>) [Risposta esatta in neretto]***

Quale delle seguenti successioni di flussi di cassa ammette sicuramente un TIR positivo?

(a) (-100, 10, 10, 10, 60)|(0, 1, 2, 3, 4)
(b) (-100, 10, 10, 10, 60)|(0, 2, 4, 6, 8)
(c) (-100, 30, 20, 10, 60)|(0, 2, 5, 8, 11)
(d) Nessuno dei precedenti

- ***ESERCIZIO 29***

Le due successioni di flussi di cassa (P, 0, Q)|(0, 1, 2) e (-10, x, x)|(0, 1, 2) (dove il tempo è espresso in anni) hanno lo stesso TIR. Calcolare il valore x.
Dati: P = -10, Q = 40

(a) $x < 0$
(b) $0 \leq x < 10$
(c) $10 \leq x < 15$
(d) $15 \leq x < 20$
(e) $20 \leq x$

Svolgimento:

Se il TIR è i, il fattore di sconto corrispondente è $c = (1 + i)^{-1}$ e soddisfa: $P + Qc^2 = 0$

Quindi: $c = [(-P)/Q]^{1/2}$

Sostituendo nel secondo flusso: $-10 + xc + xc^2 = 0$ => $\mathbf{x = 10/(c + c^2) = 13.3}$

- ***ESERCIZIO 30***

In un piano di ammortamento a quota capitale costante, il debito iniziale è D = 4500, il numero delle rate è N = 12. Determinare il valore attuale del debito D_2 dopo il pagamento delle prime due rate.

(a) $D_2 < 3500$
(b) $3500 \leq D_2 < 3900$
(c) $3900 \leq D_2 < 4200$
(d) $4200 \leq D_2 < 4400$
(e) $4400 \leq D_2 < 4650$
(f) Nessuno dei precedenti

Svolgimento:

quota capitale = C = D/N

$\mathbf{D_2 = D - 2C = D - 2D/N = D(1 - 2/N) = 3750}$

- ***ESERCIZIO 31***

Una rendita perpetua anticipata con pagamenti biennalidi importo A = 40 viene acquistata ad un prezzo P = 300. Calcolare il TIR annui i dell'operazione finanziaria.

(a) $0 \leq i < 4.10\%$
(b) $4.10\% \leq i < 6.10\%$
(c) $6.10\% \leq i < 8.10\%$
(d) $8.10\% \leq i < 10.10\%$

(e) 10.10% ≤ i

Svolgimento:

Il TIR biennale i_b si trova risolvendo: $P = A + A/ i_b$ cioè $i_b = A/(P – A)$

Il TIR annuo è $i = (1 - i_b)^{1/2} – 1 = 7.12\%$

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

– 2. TITOLI A RENDIMENTO CERTO [CAP III *del libro “FINANZA E INVESTIMENTI” autore D.G. LUENBERGER*]

2.1 INTRODUZIONE

Come sappiamo il tasso d'interesse di mercato rappresenta un termine di paragone immediato per le alternative di investimento che producono flussi di cassa ma il mercato generale associato ai tassi d'interesse è più complesso dei semplici conti bancari considerati precedentemente. Infatti in un

mercato monetario sviluppato esiste un vasto assortimento di elementi che non sono beni concreti dotati di valore intrinseco e vengono scambiati solo in forma cartacea o come voci in un *Data Base* e chiamati ***Strumenti Finanziari.*** Il loro valore deriva dagli impegni che rappresentano. Se per questi strumenti esiste un mercato sviluppato che consente di scambiarlo liberamente vengono chiamati ***Titoli.***
I *Titoli a Rendimento Certo* sono strumenti finanziari che vengono scambiati in mercati sviluppati e promettono al possessore un rendimento certo in un arco di tempo, cioè rappresentano il diritto ad una determinata successione di flussi di cassa.

- **Mercato dei Flussi di Cassa**

Se prima l'unica incertezza associata ad un titolo a reddito certo era la possibilità che l'emittente di un *Titolo* risultasse *Inadempiente,* oggi alcuni titoli a rendimento certo promettono flussi di cassa legate a varie contingenze.
In generale, un titolo a rendimento certo è caratterizzato da una successione di flussi di cassa prestabilita ma suscettibile di variazioni dovute a fattori contingenti ben definiti.

- **Tipologie**

Principalmente consideriamo tra i *Titoli a Rendimento Certo* i *Depositi Bancari (*nei quali ignoriamo il rischio di *Default)* e i *Titoli Obbligazionari* (che obbligano l'emittente a rimborsare un certo flusso all'acquirente).
Tra i *Titoli Obbligazionari* distinguiamo due principali categorie:

- *Con cedola* (inporto pagato periodicamente prima della scadenza) detti anche *Obbligazioni che Staccano Cedola o Coupon Bond* che pagano cedola ogni 6 mesi nella maggioranza dei casi. Tra i *Coupon Bond* distinguiamo i BTP e I CCT (Cedola a Tasso Variabile)

ESEMPIO 1
BTP scadenza 15 Marzo 2011 TAN=10% => Tasso Semestrale i_2=5%
Capitale Nominale 100

Quindi il periodo
t_0= -100 Uscita del Valore Nominale dell'Obbligazione
Al tempo
t_1=5 Avremo la maturazione della prima Cedola
t_2=5 Avremo la maturazione della seconda Cedola
t_3=105 Avremo la maturazione dell'ultima Cedola sommata al valore facciale del Titolo pari a 100

Senza Cedola per i quali è prevista la restituzione del capitale nominale (facciale) alla scadenza detti anche ***ZCP*** (***Zero Coupon Bond***) tra i quali avremo i ***BTP*** (***Buoni del Tesoro Poliennali***) e i ***CTZ*** (***Certificati del Tesoro Zero Coupon Bond***)

ESEMPIO 2
BOT con scadenza il 15 Marzo 2011
Al termine del periodo ci sarà la restituzione del titolo per il suo valore facciale, l'interesse sarà dato dalla differenza tra quanto viene liquidato al termine e quanto viene sborsato al momento dell'acquisto.

Sia per le obbligazioni con cedola o *COUPON BOND* che per quelle senza cedola *ZCB* vengono solitamente espressi 2 prezzi:

- ASK PRICE (prezzo lettera) è quello a cui gli operatori sono disposti a vendere l'obbligazione e ciò rappresenta il prezzo al quale è immediatamente possibile acquistarla.

- BID PRICE (prezzo denaro) quello che gli operatori sono disposti a pagare per l'obbligazione e ciò che rappresenta il prezzo al quale l'obbligazione può essere immediatamente venduta

2.2 RENDIMENTO

Il RENDIMENTO di un'obbligazione è il tasso d'interesse determinato implicitamente dalla struttura dei pagamenti ovvero è il Tasso d'Interesse che rende il Valore Attuale della Successione di Pagamenti esattamente pari al Prezzo Attuale.

- Un titolo quota *ALLA PARI* quando il suo valore nominale è pari a 100
- Un titolo quota *SOTTO LA PARI* quando il suo valore nominale è inferiore a 100
- Un titolo quota *SOPRA LA PARI* quando il suo valore nominale è superiore a 100
- Il tasso cedolare *Tasso Annuo Netto* (*TAN*) tale per cui un *BTP* è *QUOTATO ALLA PARI è il TASSO DI PARITA'* e coincide con il *TASSO EURIRS* o *TASSO SWAP.*

Il *TIR* di un'obbligazione è un tasso importante nel confronto tra diversi titoli obbligazionari perchè fondare il confronto sulla base del prezzo non è molto indicativo.
TIR per Obbligazioni = Rendimento = YIELD

2.3 CALCOLO DEL RENDIMENTO DEI BOT

Essendo il rendimento definito come il tasso di interesse che rende il valore attuale della successione di pagamenti esattamente pari al prezzo attuale allora possiamo scrivere:

$P=100*(1+y)^{-t} \Rightarrow TIR= Y=(P/100)^{-1/t}-1$

ESEMPIO 3
BOT *14/01/2011 Prezzo di Sottoscrizione=99.393*

$Y=(99.393/100)^{-365/340}-1\approx 0.66\%$

2.4 CALCOLO DEL RENDIMENTO DI OBBLIGAZIONE CHE QUOTA ALLA PARI

Supponiamo che il *Cash Flow* associato a tale obbligazione sia *(-C, I, I, I,...., C+I)* allora il valore attuale di tale flusso sarà pari a:

$$-C+\sum_{k=1}^{n} d^k*I +C*d^n=0$$

$$\sum_{k=1}^{n} d^k= a_{n\neg r}=(1-d^n)/r$$

$-C+[(1-d^n)/r]*I+C*d^n=0 \Rightarrow [(1-d^n)/r]*I-C*(1-d^n)=0 \Rightarrow$
$[(1-d^n)/r]*I=C*(1-d^n)$ eliminiamo ad entrambi i membri il termine $1-d^n$ giungendo al risultato
$I/r=C \Rightarrow r=I/C$ Il *TIR* dev'essere uguale al rapporto tra la *Cedola* ed il *Capitale.*

ESEMPIO 4
BTP *TAN=8% C=100* $\Rightarrow i_2=8/2 \Rightarrow i_2=4\%$
$i_2=4/100=4\%$ è riferito alla lunghezza temporale del semestre

- ***RIPORTARE QUESTO TASSO "SEMESTRALE" AL TASSO EFFETTIVO ANNUO***

r_a: $(1+r_a)=(1+r_2)^2 \Rightarrow r_a=(1+r_2)^2-1$ *TIR con CAPITALIZZAZIONE ANNUALE DEGLI INTERESSI*

- ***CALCOLO DEL TIR CON CAPITALIZZAZIONE SEMESTRALE DEGLI INTERESSI***

$(1+\underline{r}_a/2)^2=(1+r_2)^2 \Rightarrow \underline{r}_a=2*r_2$

2.5 CALCOLO DEL PREZZO DI UN'OBBLIGAZIONE DATO LO YELD TO MATURITY ($\lambda_{annuale}$)

DEFINIZIONE DI YELD TO MATURITY:
Data un'obbligazione che paga cedole *m* volte l'anno lo *YTM* è il *TIR* (con accredito degli interessi *m* volte l'anno) dell'operazione di acquisto dell'obbligazione al prezzo di mercato, assumendo di tenerla fino alla scadenza.

Data un'obbligazione con valore nominale *C* che prevede ogni anno *m* cedole di importo *I* per *n* periodi

(0, I, I, I, I, I, I,......, C+I)/(0, 1/2, 2/2, 3/2, 4/2, 5/2, 6/2, 7/2,.......,n) ANNI
(0, I, I, I, I, I, I,......, C+I)/(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,.......,n) SEMESTRI

$$d=(1+\lambda/2)^{-1}$$

$$P=I\sum_{k=1}^{n} d^k+C*d^n \Rightarrow P=I*(1-d^n)/(\lambda/2)+C*d^n$$

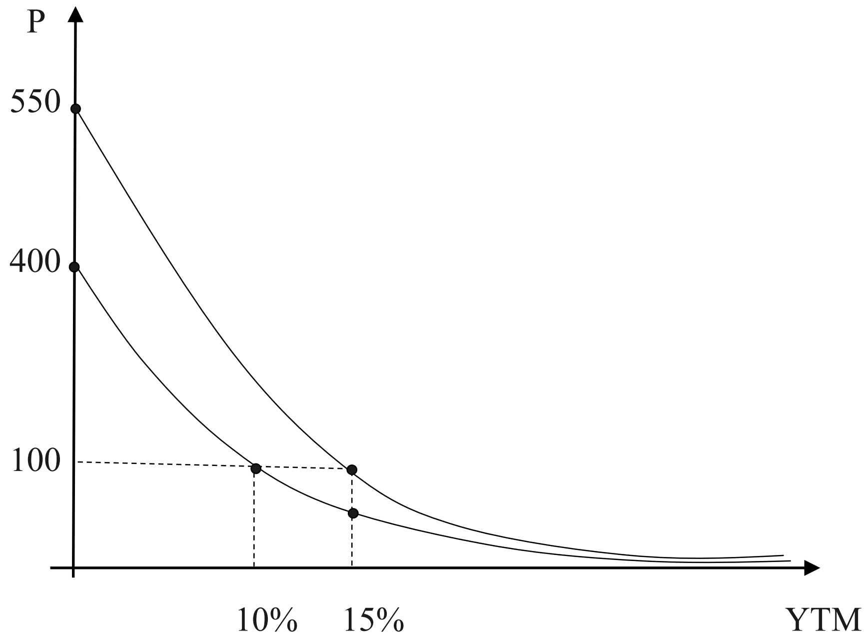
$$\sum_{k=1}^{n} d^k=a_{n|2/2}=(1-d^n)/(\lambda/2)$$

IN GENERALE:

$$P=I*(1-d^n)/(\lambda/m)+C*d^n$$

<u>2.6</u> <u>NATURA QUALITATIVA DELLE CURVE PREZZO-RENDIMENTO</u> ***[PAG 55 del libro “FINANZA E INVESTIMENTI” autore D.G. LUENBERGER]***

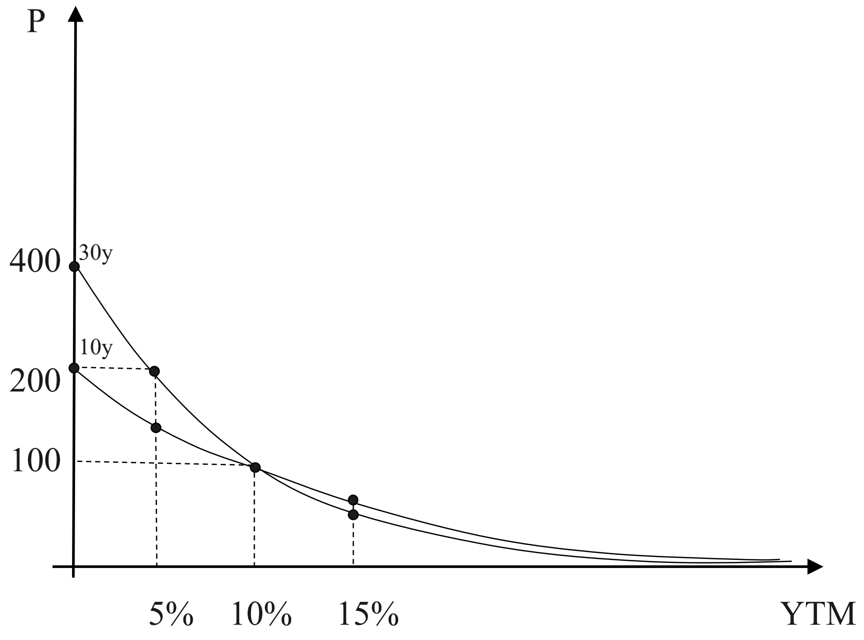
Ricordando l'equazione delle obbligazioni $P= I*(1-d^n)/ (\lambda/m)+C*d^n$ attraverso l'analisi qualitativa possiamo comprendere la relazione tra prezzo, rendimento, cedola e durata residua dell'obbligazione. La regola generale è che i *RENDIMENTI DELLE OBBLIGAZIONI e I TASSI D'INTERESSE DI ALTRI TITOLI A RENDIMENTO CERTO TENDONO AD ESSERE PIUTTOSTO SIMILI*.
L'intero mercato dei tassi d'interesse esercita una pressione su ciascuna obbligazione, premendo perchè il suo rendimento sia in sintonia con quello delle altre obbligazioni.
L'unico modo in cui il rendimento di un'obbligazione può variare è tramite la variazione del prezzo dell'obbligazione stessa; quando il rendimento varia, i prezzi si muovono di conseguenza.
LA VARIAZIONE DI PREZZO NECESSARIA PER PRODURRE UNA DETERMINATA VARIAZIONE DEL RENDIMENTO DIPENDE DALLA STRUTTURA DELL'OBBLIGAZIONE (TASSO DELLE CEDOLE E DURATA).
Quindi anche se i rendimenti delle diverse obbligazioni si muovono più o meno in armonia, i loro prezzi variano di importi differenti.
Quindi per capire le obbligazioni occorre comprendere questa relazione tra prezzo e rendimento, illustrata graficamente dalla *CURVA PREZZO-RENDIMENTO*.
Tale curva ha ovviamente inclinazione negativa, che indica che il prezzo ed il rendimento sono inversamente proporzionali: *SE IL RENDIMENTO CRESCE, IL PREZZO DIMINUISCE.*
Graficamente una curva *PREZZO-INVESTIMENTO* consiste essenzialmente nel calcolare alcuni suoi punti caratteristici:
esaminiamo ad esempio un'obbligazione che etichettiamo 10% per la quale supporremo una cedola del 10% *TAN* (ogni anno viene pagato il 10% del suo valore nominale, oppure il 5% ogni 6 mesi) e una durata di 30 anni. *LA CURVA PREZZO-RENDIMENTO MOSTRA LA RELAZIONE TRA PREZZO E RENDIMENTO DI QUESTA OBBLIGAZIONE*.
Supponiamo che *YTM=0* ovvero è come se, *AL PREZZO A CUI VIENE VENDUTA, L'OBBLIGAZIONE NON FRUTTASSE INTERESSI e quindi IL DENARO FUTURO NON VIENE SCONTATO*.
In questa situazione il valore attuale dell'obbligazione è semplicemente pari alla somma dei pagamenti ovvero cedole annuali di *10* punti per *30* anni più il 100% del valore nominale alla scadenza in totale 400, valore di questa obbligazione se il rendimento è zero.
Supponiamo ora che il YTM=10% allora il *VALORE DELL'OBBLIGAZIONE E' UGUALE AL VALORE NOMINALE, PERCHE' OGNI ANNO LA CEDOLA E' UGUALE AL RENDIMENTO ATTESO DELL'INVESTIMENTO (10%=TAN)* allora il valore nominale rimane 100 ogni anno.
In questo caso *RENDIMENTO=CEDOLA => OBBLIGAZIONE ALLA PARI*
Consideriamo infine come si comporti la curva se $YTM \rightarrow \infty$. In questo caso possiamo dedurre che il *PREZZO DELL'OBBLIGAZIONE* tende a *ZERO*: un'*ALTO RENDIMENTO IMPLICA UNO SCONTO CONSISTENTE* (nel caso limite pari a zero) annullando così tutte le attualizzazioni cedolari.
Concludiamo così come la curva sia complessivamente CONVESSA, piegata verso l'origine e distesa lungo l'asse delle ascisse.
Rappresentiamo ora l'obbligazione 15% con cedola del 15% sempre a 30 anni. Se *YTM=0* allora il prezzo sarà pari alla somma di 30 cedole del valore di 15 ovvero 450 più il 100% del valore nominale alla scadenza per un totale di 550. Se *YTM=15* il valore dell'obbligazione è uguale al valore nominale pari a 100.



E' possibile da subito constatare come la sensibilità del prezzo rispetto a variazioni del tasso di interesse sia maggiore per obbligazioni che pagano maggiore cedola.

2.7 EFFETTO DELLA DURATA SU OBBLIGAZIONI CON STESSA CEDOLA

Supponiamo di voler analizzare l'effetto del tempo rimanente alla scadenza considerando per l'appunto obbligazione con cedole uguali ma con scadenze differenti: 30 anni e 10 anni.
Se ipotizziamo per queste una cedola del 10% *(TAN=10%)* allora entrambe le obbligazioni sono *alla pari* quando il rendimento è del 10% *(YTM=10%)* passando cioè per il medesimo punto di parità *(10,100)* ma con inclinazioni diverse a seconda della scadenza.
Inoltre come nel caso precedente i valori per *YTM=0* sono calcolabili come somma semplice *(non scontata)* dei valori cedolari per la durata dell'obbligazione più il valore nominale, avendo così per l'obbligazione *30Y* un valore di *400* e per quella *10Y* un valore di *200.* La caratteristica principale è che all'aumentare della durata la *CURVA PREZZO-RENDIMENTO* diventa più ripida mantenendo come prezzo il *punto di parità*. Ciò vuol dire che DURATE MAGGIORI IMPLICANO MAGGIORE SENSIBILITA' DEL PREZZO ALLE VARIAZIONI DEI RENDIMENTI.



Supponiamo di aver acquistato le obbligazioni alla pari *(100)* con, come per ipotesi, una cedola del *10%.* Se le condizioni del mercato cambiano e il rendimento dell'obbligazione passa al *5%* notiamo come il prezzo di entrambe sia aumentato (*maggiormente per 30Y*) oltre al fatto che ora le obbligazioni paghino interessi maggiori rispetto ai tassi praticati dal mercato. Se tale situazione permane è conveniente quindi mantenere fino a scadenza l'obbligazione con **durata maggiore**. Supponiamo invece ora che le condizioni di mercato producano un incremento del rendimento dell'obbligazione che passa al 15% notando una *DIMINUZIONE DEL PREZZO (maggiormente per 30Y)* oltre al fatto che ora entrambe le obbligazioni paghino interessi minori rispetto a quelli praticati dal mercato. Se tale situazione permane è "conveniente" mantenere fino a scadenza l'obbligazione con **durata inferiore**.

2.8 DURATION

Come visto a parità di fattori, le obbligazioni di lunga durata hanno curve prezzo-rendimento più ripide di quelle con scadenza a breve termine ovvero i prezzi delle obbligazioni di lunga durata sono più sensibili alle variazioni del tasso d'interesse rispetto a quelle delle obbligazioni di breve durata. Ma la durata **non fornisce** una misura quantitativa completa della sensibilità al tasso d'interesse. Un'indicazione diretta della sensibilità al tasso d'interesse è fornita dalla *DURATION o DURATA MEDIA FINANZIARIA;* ovvero un'altra misura del tempo.
LA DURATION di uno strumento a rendimento certo è una media ponderata dei tempi in cui i pagamenti vengono effettuati e dove i coefficienti sono i valori attuali dei singoli pagamenti.

$$D_0(r)=[t_1x_1d(0,t_1)+t_2x_2d(0,t_2)+.....+t_nx_nd(0,t_n)]/[x_1d(0,t_1)+x_2d(0,t_2)+.....+x_nd(0,t_n)]$$

Come notiamo $D_0(r)$ è in effetti una media pesata dei tempi dei flussi di cassa ed è quindi espressa in unità di cassa ed è quindi espressa in unità di tempo
—› *Se tutti i flussi di cassa sono non negativi => $t_0 \leq D_0(r) \leq t_n$*
—› *Obbligazioni ZCB (Zero Coupon Bond) => $D_0(r) = t_n$*
—› *Obbligazioni con cedole => $D_0(r) < t_n$*

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

2.9 CALCOLO DELLA DURATION [RICHIESTA ALL'ESAME]

Supponiamo di avere il seguente flusso $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots, x_n)/(1, 2, \ldots\ldots, n)$
con $x_k>0$ $k=0, 1, 2, 3, 4, \ldots.\ n$ e r *tasso con capitalizzazione annuale*
allora $(1+r)^{-t}=d(0,t)$

$$VA_0(r)= x_1*(1+r)^{-t(1)}+ x_2*(1+r)^{-t(2)}+\ldots..+ x_n*(1+r)^{-t(n)}$$

Volendo evidenziare la sensibilità rispetto al tasso d'interesse allora faccio la derivata di $VA_0(r)$ rispetto ad r.

$$VA'_0(r)= x_1*(-t_1)*(1+r)^{-t(1)-1}+ x_2*(-t_2)*(1+r)^{-t(2)-1}+\ldots..+ x_n*(-t_n)*(1+r)^{-t(n)-1}$$

Metto in evidenza il fattore -(1+r)$^{--1}$ comune a tutti i termini del membro di dx

$$VA'_0(r)= [-(1+r)^{--1}]*[x_1*(t_1)*(1+r)^{-t(1)}+ x_2*(t_2)*(1+r)^{-t(2)}+\ldots..+ x_n*(t_n)*(1+r)^{-t(n)}]$$

Moltiplico e divido il membro di sx per il fattore $VA_0(r)$

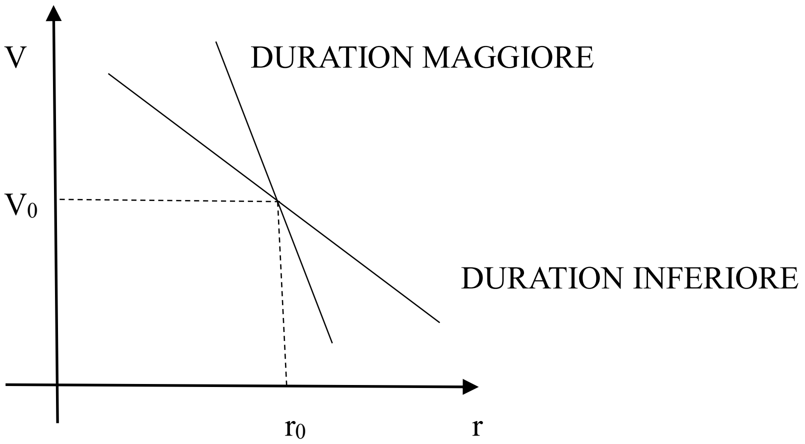
$$VA'_0(r)=\{[-(1+r)^{--1}]*[x_1*(t_1)*(1+r)^{-t(1)}+x_2*(t_2)*(1+r)^{-t(2)}+.....+x_n*(t_n)*(1+r)^{-t(n)}]/VA_0(r)\}*VA_0(r)$$

Siamo giunti ad ottenere la DURATION=$D_0(r)$ [La parte sottolineata nella formula]

$$VA'_0(r)=\{[-(1+r)^{--1}]*[\underline{x_1*(t_1)*(1+r)^{-t(1)}+x_2*(t_2)*(1+r)^{-t(2)}+.....+x_n*(t_n)*(1+r)^{-t(n)}]/VA_0(r)\}}*VA_0(r)$$

$$VA'_0(r)=-(1+r)^{-1}*D_0(r)*VA_0(r)$$

Dalla relazione tra DURATION e SENSIBILITA' DEL PREZZO notiamo come questa influenza direttamente la pendenza della curva determinando così per elevati valori di DURATION maggiore pendenza (negativa) e al contrario per bassi valori di DURATION minor pendenza (negativa). A tal riguardo è solito associare a maggiori valori di DURATION un rischio più elevato rispetto a DURATION inferiori.
In sintesi possiamo dire che la formula ***$VA'_0(r)=-(1+r)^{-1}*D_0(r)*VA_0(r)$*** esprime la relazione tra la derivata del *Valore Attuale* rispetto al *Tasso d'interesse* e *Duration.*



2.10 DURATION di Macaulay [FACOLTATIVA]

Ricordando la definizione generale di DURATION
$D_0(r)=[t_1x_1d(0,t_1)+t_2x_2d(0,t_2)+.....+t_nx_nd(0,t_n)]/[x_1d(0,t_1)+x_2d(0,t_2)+.....+x_nd(0,t_n)]$
come sommatoria dei valori attuali delle poste moltiplicate per i rispettivi tempi in rapporto al VA del flusso considerato ottenuta dal ***$VA'_0(r)=-(1+r)^{--1}*D_0(r)*VA_0(r)$.***
Tale definizione risulta però vaga riguardo al tasso d'interesse da utilizzare. Nel caso specifico in cui ci stessimo riferendo ad obbligazioni è naturale basarci sul rendimento delle obbligazioni stesse, ovvero sullo ***YELD to MATURITY (λ).***
Ciò da luogo alla DURATION DI Macaulay così definita:

- Per uno strumento finanziario che preveda “m” pagamenti l'anno, con I_k pagamento del periodo k e n periodi rimanenti allora:

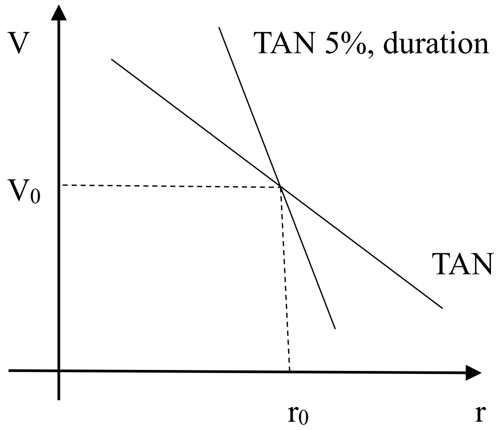
$$D=[\sum_{k=1}^{n}(k/m)*I_k*(1+\lambda/m)^{-k}]/VA$$ con k/m che rappresenta il tempo riferito in anni e

con $$VA=\sum_{k=1}^{n}I_k*(1+\lambda/m)^{-k}$$

Se generalizzando consideriamo che gli *n* periodi rimanenti siano tutti i periodi *m* pagamenti allora ***$V(t_0)=P_0$ —› Prezzo di mercato dell'obbligazione.***

Vi possono esser dei casi particolari come i titoli ZCB (BOT) in cui la DURATION coincide con la scadenza del titolo stesso ***[RICHIESTA ALL'ESAME]***

Intuitivamente si può dedurre che nei titoli con cedola tanto maggiormente le cedole pesano sull'investimento eseguito tanto più la DURATION sarà lontana dalla scadenza del titolo stesso questo perchè la DURATION la si può intendere come il "BARICENTO" dell'asse sulla quale poniamo le poste economiche nei diversi periodi di tempo. Da ciò possiamo dare un'ulteriore definizione di DURATION come il *TEMPO CHE OCCORRE PER RECUPERARE IL CAPITALE INVESTITO.*
Se consideriamo due BTP a 10 anni ma uno con cedola al 5% e l'altro con cedola al 20% possiamo sempre facendo l'esempio della DURATION come BARICENTRO, supporre che si avrà MASSIMA DURATION se immaginiamo cedole prossime allo zero o comunque molto piccole e MINIMA DURATION se aumentassimo al massimo le cedole. Quindi in generale se due BTP hanno la medesima durata ma TAN diversi, quello con TAN maggiore, cedole grandi, avrà una duration minore e quello con TAN inferiore avrà durata maggiore.



TAN 5%, duration alta (è da scegliere se pensiamo che i tassi di interesse scendano, perché genererebbe un elevato guadagno)

TAN 20%, duration bassa (è da scegliere per limitare il rischio legato a variazioni del tasso d'interesse)

2.11 DURATION di Portafoglio

Supponiamo di detenere diversi titoli in quote differenti e di conoscere per ognuno la singola DURATION. Considero le obbligazioni *a* e *b* il cui VALORE ATTUALE e DURATION sono rispettivamente *VA(a)*, D_a e *VA(b)*, D_b . Considero allora il portafoglio P composto da ß quote di *a* e ∂ quote di *b*.
Il *VALORE ATTUALE* di P è: $VA_p= ß*VA(a)+∂ *VA(b)$ calcolato come combinazione lineare rispetto alla quota dei due valori attuali e la *DURATION* di *P* espressa come MEDIA PONDERATA DELLE RISPETTIVE DURATION pesata rispetto alle rispettivo quote possedute.

$D_p= [ß*VA(a)*D_a]/VA_p+[∂ *VA(b)*D_b]/ Va_p$

2.12 QUANTIFICARE LA VARIAZIONE DEL VALORE DEL PORTAFOGLIO AL VARIARE DEL TASSO D'INTERESSE

Supponiamo che il valore attuale del mio portafoglio obbligazionario è V_0=10.000€, la Duration è di 4,5 anni e il tasso di rendimento (YTM) è del 2%.
Calcoliamo quale sarà il valore del portafoglio se r_0 aumenta di 50bp=0.005=5‰
Ci stiamo chiedendo e cerchiamo di calcolare, il valore attuale in corrispondenza di r_0+h
$VA(r_0+h) \sim VA(r_0)+VA'(r_0)*h$ questa approssimazione è calcolata con lo sviluppo del polinomio di Taylor al primo ordine.

$VA(r_0+h) \sim VA(r_0)+(D/1+r)*VA(r_0)*h \Rightarrow [VA(r_0+h)-VA(r_0)]/VA(r_0) \sim h*(D/1+r)$

Nell'esempio specifico $h=0.005$, $r=0.02$ e $D=4.5$

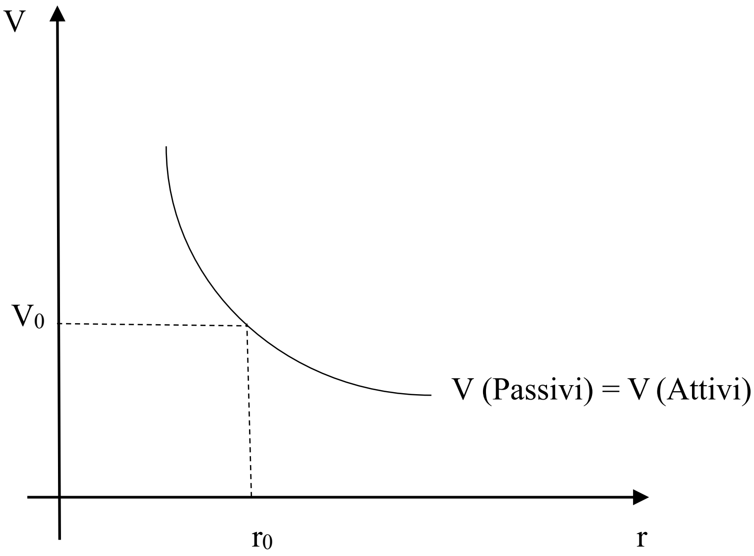
$[VA(2.5\%)-VA(2\%)]/VA(2\%) \sim -0.005*(4.5/1.02) =-0.022$
Il valore del portafoglio diminuirà del *2.2%*

2.13 PROPRIETA' QUALITATIVE DELLA DURATION

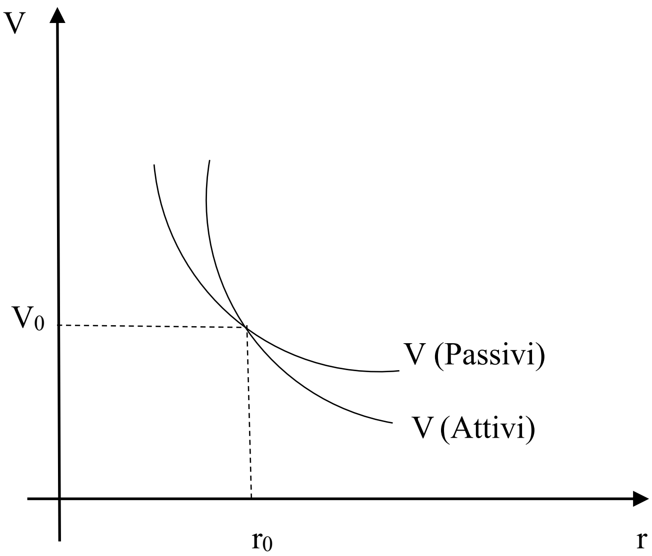
Per le obbligazioni con cedole la DURATION è sempre inferiore alla maturità, a scadenza, della obbligazione, ma spesso è sorprendentemente bassa. Una caratteristica è che al TENDERE ALL'INFINITO DELLA SCADENZA, LA DURATION NON TENDE ALL'INFINITO MA AD UN LIMITE FINITO INDIPENDENTE DALLA CEDOLA.
Inoltre essa non varia rapidamente rispetto alla cedola. Il fatto che il rendimento sia mantenuto costante tende ad annullare l'effetto delle cedole.
IN GENERALE:
DURATION MOLTO ALTE SONO RAGGIUNTE SOLO DA OBBLIGAZIONI CHE HANNO CONTEMPORANEAMENTE SCADENZA MOLTO LUNGA E CEDOLA MOLTO BASSA.

2.14 IMMUNIZZAZIONE (RICHIESTA ALL'ESAME)

Un problema di grande importanza pratica è quello della composizione di portafoglio protetto dal rischio di tasso d'interesse; tale procedura prende il nome di *IMMUNIZZAZIONE* perchè rende immune il valore del portafoglio alle variazioni del tasso d'interesse. Occorre però tener ben presente lo scopo per cui occorre "immunizzare" il nostro portafoglio. Supponiamo di dover restituire una certa posta ad un tempo T e di voler capire come disponiamo esattamente al tempo T di quella somma. L'ipotesi più semplice consisterebbe nell'acquistare un'obbligazione che scada esattamente al tempo T ma ipotizziamo l'inesistenza di tale opportunità. In questo caso se esistesse tale opportunità si avrebbe, con durata e valori nominali esattamente uguali, la corrispondenza perfetta tra il VA_0 (Passivi) e il VA_0 (Attivi) per qualsiasi valore del tasso d'interesse. Questa situazione ideale di IMMUNIZZAZIONE PERFETTA o anche detta di PERFECT MATCHING è caratterizzata dal fatto che le curve V (Passivi) e V (Attivi) coincidano.



Questa tecnica basata sull'equivalenza del valore attuale diventa problematica se il rendimento varia poiché tanto il flusso degli investimenti e cioè del portafoglio quanto il valore attuale del flusso dei debiti cambieranno di conseguenza ma, probabilmente in misure differenti e quindi il portafoglio non varrà più quanto i debiti e le due non coincideranno più. Cercheremo allora di approssimare al primo ordine le due curve che quindi presenteranno la STESSA DERIVATA il che vuol dire far corrispondere, oltre ai valori attuali, anche le DURATION.
Infatti se la DURATION del PORTAFOGLIO corrisponde a quella della successione dei debiti, il valore di mercato del portafoglio e il valore attuale del flusso dei debiti risponderanno in modo identico (fino al primo ordine) alle variazioni del rendimento.



Se il rendimento aumenta il valore attuale del portafoglio dei titoli diminuisce ma il valore attuale dei debiti diminuisce approssimativamente nella stessa misura; il valore del portafoglio rimane quindi adeguato alla copertura dei debiti. Possiamo allora descrivere l'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA come la risoluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} VA_{0\ (Passivi)} = VA_{0\ (Attivi)} \\ D_{0\ (Attivi)} = D_{0\ (Passivi)} \end{cases}$$

Esempio 5:

Una società deve pagare un debito di un Milione di € in 10 anni e intende investire oggi una somma di denaro sufficiente per saldare il debito nel futuro. La società può scegliere le tre seguenti obbligazioni societarie:

	TAN	SCAD	P	YTM	D
1	*6%*	*30Y*	*69.04*	*9%*	*11.44*
2	*11%*	*10Y*	*113.01*	*9%*	*6.54*
3	*9%*	*20Y*	*100.00*	*9%*	*9.61*

La società valuta inizialmente l'utilizzo delle obbligazioni 2 e 3 e deve confrontare la *DURATION* delle passività (10 anni) con la media della DURATION delle precedenti obbligazioni che già sappiamo non raggiungerà quella delle passività, essendo D_2=6.54 e D_3=9.61 e quindi la *DURATION del PORTAFOGLIO* D_2 e D_3 avrà sicuramente un valore compreso in questo intervallo. La società decide allora di investire nelle obbligazioni 1 e 2. Quanto deve investire nella obbligazioni della tipologia 1 e quanto nella obbligazione della tipologia 2?
Il valore attuale del debito al 9% di interesse sarà pari a:

$VA_{0\ (Passivi)}=1.000.000*(1+0.09)^{-10}$ => $VA_{0\ (Passivi)}$=422.410,8

e indichiamo con ***x*** le quote acquistate dell'obbligazione 1
e con ***y*** le quote acquistate dell'obbligazione 2

Impostiamo il sistema per risolvere il problema di IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA:

$$\begin{cases} VA_{0\ (Passivi)}=VA_{0\ (Attivi)} \\ D_{0\ (Attivi)}=D_{0\ (Passivi)} \end{cases} ; \quad \begin{cases} xP_1+yP_2=VA_{0\ (Passivi)} \\ [xP_1/VA_{0\ (Passivi)}]*D_1+[yP_2/VA_{0\ (Passivi)}]*D_2=D_p \end{cases}$$

$$\begin{cases} xP_1+yP_2=VA_{0\ (Passivi)} \\ xP_1D_1+yP_2D_2=D_pVA_{0\ (Passivi)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x*69,04+y*113,01=422.410,8 \\ x*69,04*11.44+y*113,01*6,54=10*422.410,8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x*69,04+y*113,01=422.410,8 \\ x*789,8176+y*739,0854=4224108 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x*69{,}04+y*113{,}01=422.410{,}8 \\ x=(422410-y*739{,}0854)/789{,}8176 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [(422410-y*739{,}0854)/789{,}8176]*69{,}04+y*113{,}01=422.410{,}8 \\ x=(422410-y*739{,}0854)/789{,}8176 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [(422410-y*739{,}0854)*0.0874+y*113{,}01=422.410{,}8 \\ x=(422410-y*739{,}0854)]*0.0874+y*113{,}01=422.410{,}8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 369240{,}02-64{,}6053*y+113{,}01*y=422.410{,}8 \\ x=(422410-y*739{,}0854)]*0.0874+y*113{,}01=422.410{,}8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 48{,}40y=53170{,}6 \\ x=(422410-y*739{,}0854)]*0.0874+y*113{,}01=422.410{,}8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1098{,}56 \\ x=(422410-1098{,}56*739{,}0854)]*789{,}8176 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1098{,}56 \\ x=4320{,}21 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_y*y=121854{,}27 \\ P_x*x=292788{,}73 \end{cases}$$

2.15 METODI PER RIMBORSARE PRESTITI-MUTUI, PIANI DI AMMORTAMENTO, RENDITE [RICHIESTO ALL'ESAME]

RENDITA PERPETUA —› paga la prima cedola dopo 1 anno e fine all'infinito

Il calcolo del valore attuale in questo caso è:

$V^{(n)}_0=A*[1-d^n]/r$ —› Valore Attuale fino ad n

e quindi

$V^{(\infty)}_0=\lim_{n\to\infty} V^{(n)}_0 \Rightarrow V^{(\infty)}_0=\lim_{n\to\infty} A*[1-d^n]/r \Rightarrow$ essendo $d<1$ il limite $d^n \to \infty = 0 \Rightarrow V^{(\infty)}_0=A/r$

Esempio 6:

100€ l'anno r=10% per sempre in alternativa a 2000€ subito

$VA_{0[1]}=100€/0,1 \Rightarrow VA_{0[1]}=1000€$

$VA_{0[2]}=2000€$

In base al confronto la scelta razionale verterebbe sulla ***seconda opportunità***.

Esempio 7:

Valutare rispetto ad un tasso r=10% una obbligazione di durata infinita che paga cedole annuali ad un TAN=5% anno.

$A=5$

$VA_{(Cedole)}=5/0,1=50$ $VA_{(Capitale)}=100*d^n=0$ *perchè essendo* $d<1$ *il limite* $d^n \longrightarrow \infty = 0$

$VA_{(Obbligazione)}=50$

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

2.16 DETERMINAZIONE DELLA RATA COSTANTE POSTICIPATA (si paga alla fine del periodo) NEL RIMBORSO DI UN PRESTITO

Vogliamo determinare R conoscendo il tasso d'interesse

Vogliamo innanzitutto che il VA delle rate R sia uguale a C valutato rispetto ad r:

$R*[(1-d^n)/r]=C \Rightarrow R=C/[(1-d^n)/r]$

Esempio 8:

Calcolare la rata costante necessaria per rimborsare un prestito C in n rate mensili rispetto ad un TAN=r a capitalizzazione mensile

$C=1000000 \quad n=40 \quad r=20\% \Rightarrow r_{12}=0,2/12 \Rightarrow r_{12}=0,017 \Rightarrow d_{12}=(1+r_{12})^{-1} \Rightarrow d_{12}=(1,017)^{-1} \Rightarrow d_{12}=0,98$

$R=C/[(1-d^n)/r] \Rightarrow R= 1000000/[(1-0,98^{40})/0,2] \Rightarrow R=34452,77$

2.17 PIANI DI AMMORTAMENTO PER MUTUI [RICHIESTO ALL'ESAME]

- **Piano di ammortamento a rata costante (*Ammortamento Francese*)**

E' un piano di ammortamento nel quale per l'intera durata si mantiene costante e pari ad R e si vede composta da una *QUOTA CAPITALE* e da una *QUOTA INTERESSI.*

R=Quota Interessi (QI)+ Quota Capitale (QC)= I +C

Andiamo a determinare la Quota Interessi come il prodotto tra Debito ed Interesse. Essendo nella maggioranza dei casi la Rata Posticipata allora si avrà che la Quota Interessi al tempo 1 sarà:
$I_1=D_0*i$ *con* D_0*= Debito all'istante zero*
Essendo la *Rata Costante* allora la *Quota Capitale* sarà determinata come differenza tra l'importo della stessa *Rata* $(R=C/[(1-d^n)/r)$ *e la Quota Interessi*
$C_1=R-I_1$
Di conseguenza avremo che al tempo 1 il Debito, su cui si andrà a determinare la Quota interessi del secondo periodo sarà:
$D_1=D_0-C$

ESEMPIO 9:

Piano di ammortamento prestito 100000€ da restituire in 10 anni a rate mensili costanti posticipate ad un TAN=4,77% senza spese (TAN=TAEG).

Val inizio Fin	TAN	Anni	m
100000	*4,77%*	*10*	*12*

*Tot rate=10*12=120;* $i_{12}=4{,}77\%/12=0{,}40\%$; $d_{12}=(1+0{,}04)^{-1}=0.9960$

$a_{n\neg i(12)}=(1-d^n)/\, i_{12} \Rightarrow a_{n\neg i(12)}=(1-0.9960^{120})/0.9960$

$R=D_0/a_{n\neg i(12)}=1049{,}45$

Periodo	*Rata*	*Quota Interessi*	*Quota Capitale*	*Debito*
0	***-***	***-***	***-***	***100000***
1	*1049,45*	*397,5*	*651,95*	*99348,05*
2	*1049,45*	*394,91*	*654,54*	*98693,51*
.				
.				
.				
.				
120				

In questa situazione, dato che non ci sono spese, il *TAN* dovrebbe coincidere con il *TAEG*, anche se ci è fornito un diverso valore dovuto al fatto che il *TAN* è un ***tasso annuale con capitalizzazione mensile*** il *TAEG* è quel ***tasso di rendimento con capitalizzazione annuale*** e calcolato quindi come *TASSO EFFETTIVO.*

$i=4{,}77\%=TAN$

$(1+i/12)^m=(1+i_{effettivo}) \Rightarrow i_e=(1+i/12)^m-1$ *con* $m=12$

Nel caso vi siano delle spese un metodo per il calcolo del *TAEG* è quello di considerare tali spese a differenza del capitale prestato e di considerare, data la rata, il *TAEG* come il *TIR* che rende il *Valore Attuale* delle rate, a tasso costante r, esattamente uguale all'ammontare del capitale al quale sottraiamo le spese:

$100000-SPESE=R(1-d^n{}_{(r)})/r$

Essendo però tale TIR espresso per una capitalizzazione mensile dovrà poi esser riportato al tasso equivalente con capitalizzazione annuale $i_e=(1+i/12)^m-1$

<u>2.18 PIANO DI AMMORTAMENTO A QUOTA CAPITALE COSTANTE (*AMMORTAMENTO ITALIANO*)</u>

E' quel piano di ammortamento che prevede di corrispondere una quota capitale costante e quindi si avrà una rata variabile nel tempo. Calcoleremo quindi prima la Quota Capitale come rapporto tra Debito e Numero Totale di Rate: $C=D/n;$ la quota interessi sarà sempre calcolata come $I_1=D_0*i$ e quindi la rata sarà in 1 pari a $R_1=C+I_1$.

<u>2.19 PRE-AMMORTAMENTO</u>

Il periodo di pre-ammortamento è quel periodo nel quale è rimborsata la sola quota interesse e quindi vedrà una rata composta solamente dalla quota interessi; questo perché si paga il minimo affinchè il debito no aumenti.

ESERCIZI PROPOSTI

- ***ESERCIZIO 1***

Testo

Per rimborsare un debito di 1000€ viene proposto un piano di ammortamento a un TAN i con rate m mensili e costanti ed una rata di pre-ammortamento. Riportare l'importo della rata di pre-ammortamento R_P e della rata costante R. Calcolare il TIR y del piano di ammortamento

1. Calcolare il TIR y del piano di ammortamento

[Dati: i = 10%, m = 14]

Svolgimento

Il tasso mensile è $i_{12} = i/12 \Rightarrow i_{12} = 0,1/12$

La rata di pre-ammortamento è $R_p= r*1000$
La rata di ammortamento è $R_p=1000/a_{r\neg m} \Rightarrow R_p=1000*d/[(1-d^m)/i_{12}]$
Il *TIR* è il *Tasso Effettivo Annuo* equivalente $y=(1+i_{12})^{12}-1$

- ***ESERCIZIO 2***

Testo

Consideriamo due obbligazioni. L'obbligazione A ha un prezzo P_a e duration D_a, l'obbligazioni B ha un prezzo P_b e duration D_b.

1. Quanto denaro occorre investire in A e B per immunizzare un'uscita al tempo T il cui valore attuale è 2500€?

[Dati: P_a = 95, D_a=1, P_b = 105, D_b=5 T = 3]

Svolgimento

Indichiamo con x e y le quote di A e di B. Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} xP_a+yP_b=2500 \\ xD_aP_a+yD_bP_b=3*2500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x*95+y*105=2500 \\ x*1*95+y*5*105=3*2500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=(2500-y*105)/95 \\ (2500-y*105)+y*5*105=3*2500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=(2500-y*105)/95 \\ 2500-y*105+y*525=7500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=(2500-y*105)/95 \\ y*420=7500-2500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=(2500-y*105)/95 \\ y=5000/420 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=(2500-11,9*105)/95 \\ y=11,9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=13,16 \\ y=11,9 \end{cases}$$

Di conseguenza il denaro investito è

$$\begin{cases} x*P_a=1250 \\ y*P_b=1249,5 \end{cases}$$

- ***ESERCIZIO 3***

Testo
Consideriamo un mercato in cui opera un banca ideale con tasso annuo r e capitalizzazione degli

interessi mensile.

1. ***A quali prezzi sarebbe conveniente acquistare un titolo che rimborsa un importo costante I al termine di ogni <u>mese</u> da oggi in poi, <u>per sempre</u>?***
2. ***Investire un capitale in tale titolo è più o meno rischioso (dal punto di vista della sensibilità alle variazioni del tasso di interesse) che investirlo in un ZCB che rimborsa capitale dopo 7 anni? Motivare la risposta***

[Dati: I= 10, r = 10%]

Svolgimento

Il valore attuale della rendita perpetua è $V_0=I/r_m$ $r_m=r/12$

ergo se il prezzo è minore di V_0 l'acquisto è conveniente.
La DURATION della rendita perpetua è $D=1+1/r_m$
se D è maggiore di 7*12=84 mesi allora l'investimento è più rischioso, altrimenti è meno rischioso.

- ***ESERCIZIO 4***

Testo
Consideriamo due BTP il primo con TAN=10%, l'altro con TAN=5% e un BOT. Tutti i titoli hanno la stessa MATURITY. Indicare il titolo più sensibile e quello meno sensibile rispetto alle variazioni di tasso d'interesse.

Svolgimento

In ordine crescente rispetto alla sensibilità

1:BTP 10% 2:BTP 5% 3:BOT

- ***ESERCIZIO 5***

Testo
In un piano d'ammortamento italiano (QC costante) il debito iniziale è D, il numero delle rate è N e l'importo della prima quota interesse è I_1.

1. Determinare l'importo della prima rata R_1.

[Dati: D= 1900, N = 12, I_1=100]

Svolgimento

La quota Capitale è C=D/N => C= 1900/12 => C=158,3

La prima rata è R_1=C+I_1 => R_1=158,3+100 => R_1=258,3

- ***ESERCIZIO 6***

Testo
Un'obbligazione del valore nominale di 100€ sarà rimborsata tra 4 anni e pagherà cedole annue di 6€ .

1. Qual è il suo prezzo P se il suo tasso di rendimento effettivo ("Yield To Maturity") è pari ad y ?

[Dati: y=10% annuo]

Svolgimento

$P=6*a_{4\neg y}+100*(1+y)^{-4} \Rightarrow P=[6*(1+y)^{-4}]/y+100*(1+y)^{-4}$

- ***ESERCIZIO 7 [DOMANDA TEORICA]***

Testo
E' noto che il valore attuale di una rendita perpetua __posticipata__ con rata annuale costante A è VA_0 =A/i e la sua DURATION è D=1+1/i, dove i è il tasso di interesse annuo.

1. Utilizzare questi risultati per determinare il valore attuale e la duration di una rendita perpetua __anticipata__ con rata annuale costante A.

Svolgimento

La rendita perpetua anticipata si ottiene aggiungendo un importo A, pagato al tempo 0, al flusso della rendita posticipata. Quindi il suo valore in 0 è:

$V_0^{(a)}=A+V_0 \Rightarrow V_0^{(a)}=A+A/i$

La DURATION soddisfa la relazione:

$V'/V= -D/(1+i)$

Sostituendo $V_0^{(a)\prime}= -A/i^2$ si trova:

$-(A/i^2)/A(1+1/i)= -D/(1+i)$

$-(1/i^2)/(1+1/i)= -D/(1+i) \Rightarrow D=1/i$

Alternativamente, utilizzando la formula della DURATION di un Portafoglio:

$D=(A/V_0^{(a)})*0+[V_0/V_0^{(a)}]*(1+1/i) \Rightarrow D=1/i$

- ***ESERCIZIO 8***

Testo
In un piano d'ammortamento francese (rata costante) il debito iniziale è D, il numero delle rate è

N e l'importo della prima quota interesse è I_1.

1. Determinare l'importo della prima rata R_1.

[Dati: D= 5000, N = 12, I_1=100]

Svolgimento

Determino il tasso d'interesse $i=I_1/D$

Calcolo $a_{N\neg i}=(1-d^N)/i$ dove $d=(1+i)^{-1}$

$R=D/a_{N\neg i}$

- ***ESERCIZIO 9***

Testo
Le due successioni di flussi di cassa (P, 0, Q)/(0, 1, 2) e (-10, x, x)/(0, 1, 2) dove il tempo è espresso in anni hanno lo stesso TIR.

1. Calcolare il valore x.

[Dati: P= -10, Q=40]

Svolgimento

Se il TIR è i allora il fattore di sconto corrispondente è $d=(1+i)^{-1}$ e soddisfa :

$P+Qc^2=0$ quindi $C=[-P/Q]^{1/2}$

Sostituendo nel secondo flusso:

$-10+xc+xc^2=0 \Rightarrow x=10/(c+c^2)$

- ***ESERCIZIO 10***

Testo
Date le seguenti obbligazioni, con i relativi prezzi:

a) BOT scadenza 6 mesi, prezzo P_1
b) BTP TAN 6%, scadenza 1 anno, prezzo P_2

Tenendo conto che i BTP pagano cedole ogni sei mesi

1. Calcolare il valore attuale P_3 del BOT che scade tra un anno?

[Dati: P_1=95, P_2=102]

Svolgimento

$P_1=100*d_1 \Rightarrow d_1=P_1/100$

$P_2=3*d_1+103*d_2 \Rightarrow d_2=(P_2-3*d_1)/103$

$P_3=100*d_2$

- ***ESERCIZIO 11***

Testo
Con gli stessi dati dell'esercizio precedentemente.

1. Quale dev'esser l'importo I della cedola perchè un BTP che scade tra un anno quoti alla pari?

Svolgimento

$100=I*d_1+(100+I)*d_2$ =>

$I=(100-100*d_2)/(d_1+d_2)$

- ***ESERCIZIO 12 [DIMOSTRAZIONE]***

Testo
Determinare, dimostrandola, la formula che esprime il valore attuale di una rendita a rata costante, finita posticipata.

Svolgimento

Una rendita di durata N si ottiene come differenza di una rendita infinita con pagamento in t=1 e una rendita infinita con primo pagamento in t=N+1.

Il suo valore in 0 quindi è:

$V_0=I/i - (I/i)*d^N= I*(1-d^N)/i$

- ***ESERCIZIO 13***

Testo
Una rendita <u>perpetua anticipata</u> con pagamenti <u>biennali</u> di importo A viene acquistata ad un prezzo P.

1. Calcolare il TIR annuo i dell'operazione finanziaria?

[Dati: A=40, P=300]

Svolgimento

Il TIR biennale i_b si trova risolvendo $A+A/i_b=P$

cioè $i_b=A/P-A$

Il TIR annuo è

$i=(1+ i_b)^{1/2}-1$

- ***ESERCIZIO 14***

Testo
Sia P il prezzo di uno ZCB (Obbligazione Zero Coupon Bond) che scade tra 8 anni e Q il prezzo di un'obbligazione con TAN=2% avente la stessa scadenza.

1. Determinare il prezzo V di un'obbligazione con TAN=6% scadente anch'essa tra 8 anni.

[Dati: P=97, Q=99]

Svolgimento

L'obbligazione con *TAN* 6% si può ottenere acquistando "*x*" quote dello *ZCB* e "*y*" quote dell'obbligazione con *TAN* 2%, dove "*x*" e "*y*":

$$\Rightarrow \begin{cases} x*0+y*2=6 \\ x*1+y*1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

Quindi per evitare arbitraggi il prezzo V è uguale a $V=x*P+y*Q \Rightarrow V=-2*97+3*99$
$\Rightarrow V=103$

- ***ESERCIZIO 15***

Testo
Calcolare la Duration D di un'obbligazione che scade tra 2 anni con flusso di pagamenti (3, 103), sapendo che il prezzo dello ZCB con scadenza tra 1 anno è P_1 e il prezzo dello ZCB con scadenza tra 2 anni è P_2.

[Dati: P_1=98, P_2=97]

Svolgimento

$P_1= d_1*100 \Rightarrow d_1= P_1/100 \Rightarrow d_1= 0,98$

$P_2= d_2*100 \Rightarrow d_2= P_2/100 \Rightarrow d_2= 0,97$

La DURATION è pari a

$D=(3*d_1+2*103*d_2)/(3*d_1+103*d_2)$ => $D=(3*0,98+2*103*0,97)/(3*0,98+103*0,97)$ => $D=(2,94+199,82)/(2,94+99,91)$ => $D=(202,76)/(102,85)$ => $D=1,97$

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

- ***ESERCIZIO 16***

Testo
Calcolare la Duration D di un'obbligazione che scade tra 2 anni con flusso di pagamenti (3, 103), sapendo che il prezzo dello ZCB con scadenza tra 1 anno è P_1 e il prezzo dello ZCB con scadenza tra 2 anni è P_2.

[Dati: P_1=98, P_2=97]

Svolgimento

$P_1= d_1*100$ => $d_1= P_1/100$ => $d_1= 0,98$

$P_2= d_2*100 => d_2= P_2/100 => d_2= 0,97$

La DURATION è pari a

$D=(3*d_1+2*103*d_2)/(3*d_1+103*d_2) => D=(3*0,98+2*103*0,97)/(3*0,98+103*0,97) =>$
$D=(2,94+199,82)/(2,94+99,91) => D=(202,76)/(102,85) => D=1,97$

- ***ESERCIZIO 17***

Testo
Per rimborsare un debito di 1000€ viene proposto un piano di ammortamento le cui prime due righe sono

k	**D**	**R**	**C**	**I**
0	1000	0	0	0
1	900	130	100	30

1. Calcolare la riga successiva del piano di ammortamento nel caso

a) di rimborso a rate costanti (Francese)

b) di rimborso a quota capitale costante (Italiano)

Svolgimento

– Calcolo il taso d'interesse $i=I_1/D => i=30/1000 => i=0,03$

1. Rata Costante:

$R_2=R_1$; $I_2=D_1*i => I_2=900*0,03 => I_2=27$; $C_2=R_2 – I_2 => C_2=130-27 => C_2=103$;

$D_2=D_1-C_2 => D_2=900-103 => D_2=797$

2. Quota Capitale Costante

$C_2=C_1$; $I_2=D_1*i => I_2=900*0,03 => I_2=27$; $R_2=C_2+I_2 => R_2=100+27 => R_2=127$

- ***ESERCIZIO 18 [DOMANDA TEORICA] (in neretto la risposta esatta)***

Il TAN di un'obbligazione è minore del suo yield to maturity, quindi....

a)....l'obbligazione quota sopra la pari
b)....l'obbligazione quota sotto la pari
c)....il valore dell'obbligazione dipende dalla durata

- ***ESERCIZIO 19 [DOMANDA TEORICA] (in neretto la risposta esatta)***

Per un titolo a tasso variabile...

a)....il flusso di pagamenti è aleatorio come il valore attuale.
b)....il flusso di pagamenti è aleatorio ma il valore attuale è deterministico.
c)....il flusso di pagamenti è deterministico ma il valore attuale è aleatorio.
d)....nessuna delle precedenti.

- ***ESERCIZIO 20***

Testo
Quanti pagamenti sono necessari per rimborsare D euro con rate costanti semestrali di importo non superiore a K euro se il tasso d'interesse annuo è 12% e la capitalizzazione degli interessi è semestrale? Riportare la prima riga del piano d'ammortamento corrispondente.

[Dati: D=1000, K=150]

Svolgimento

Il numero di pagamenti dev'essere maggiore o uguale di $n=[ln(1+r*D/K)]/lnd$ perchè
$D=a_{n\neg r}*K \Rightarrow D=[(1-d^n)/r]*K \Rightarrow D/K=(1-d^n)/r \Rightarrow r*(D/K)=(1-d^n) \Rightarrow r*(D/K)-1 = -d^n \Rightarrow$ applicando ad entrambi i membri il *"logaritmo naturale" (ln)* per abbassare l'esponente alla base e poterlo calcolare giungiamo a $\Rightarrow ln[1-r*(D/K)]=n*lnd \Rightarrow n=\{ln[1-r*(D/K)]\}/ lnd$

dove $r=0,12/2 \Rightarrow r=0,06$ e $d=(1+r)^{-1}$

Il numero di pagamenti N necessari è pari al più piccolo intero maggiore di n. Una volta trovato N, la prima riga del piano d'ammortamento si trova con:

$R=D/ a_{n\neg r}$; $I_1=D*r$; $C_1=R- I_1$; $D_1=D-C_1$

- ***ESERCIZIO 21***

Testo

Data la struttura dei fattori di sconto a pronti d(0,1), d(0,2), d(0,3), d(0,4) dove il tempo è espresso in anni, calcolare.

1. ***Il prezzo a pronti e la Duration del flusso x\t={10, 0, 110}\{2, 3, 4}***

2. ***L'importo I per cui il flusso x\t={-1000, I, I, 1000+I}\{0, 1, 2, 3} è equo (cioè ha valore nullo) in t=0***

3. ***Il TAN che deve avere un titolo che paga cedole annuali e matura tra 3 anni per quotare sotto la pari.***

[Dati: d(0,1)=0.98, d(0,2)=0.97, d(0,3)=0.96, d(0,4)=0.955]

Svolgimento

1. Prezzo a pronti => $V_0=10*d(0,2)+110*d(0,4)$

   Duration => $D_0=[10*2*d(0,2)+110*4*d(0,4)]/ V_0$

2. Risolvo rispetto ad I la seguente equazione ponendola pari a zero:

   $-1000+I*d(0,1)+I*d(0,2)+(I+1000)*d(0,3)=0$ =>
   $I=1000*[1-d(0,3)]/[d(0,1)+d(0,2)+d(0,3)]$

3. Il tasso di parità è $j=I/1000$ ergo ogni titolo con $TAN<j$ quota sotto la pari.

- ***ESERCIZIO 22 [DOMANDA TEORICA] (in neretto la risposta esatta)***

Considerare un flusso di pagamenti a rata costante annuale di durata N anni. Il valore attuale del flusso rispetto a un tasso annuo i>0...

a)....è crescente rispetto a *N* e illimitato per *N* che tende a infinito.
b)....è crescente rispetto a *N* e limitato per *N* che tende a infinito.
c)....è decrescente rispetto a *N* e tende a 0 per *N* che tende a infinito.

- ***ESERCIZIO 23 [DOMANDA TEORICA] (in neretto la risposta esatta)***

Quale delle seguenti azioni comporta più verosimilmente una diminuzione della Duration di un portafoglio obbligazionario?

a) Vendere *BOT* e acquistare *CCT*.
b) Vendere *BOT* e acquistare *BTP*.
c) Vendere CCT e acquistare BTP.

- ***ESERCIZIO 24 [DOMANDA TEORICA] (in neretto la risposta esatta)***

Per un titolo a tasso variabile...

a) Il flusso di pagamenti è aleatorio come il valore attuale.
b) Il flusso di pagamenti è aleatorio ma il valore attuale è deterministico.
c) Il flusso di pagamenti è deterministico ma il valore attuale è aleatorio.
d) Nessuna delle precedenti.

- ***ESERCIZIO 25***

Testo
La costruzione di un nuovo tratto autostradale ha un costo iniziale di 10 milioni di euro. La società realizzatrice richiede un finanziamento per coprire tale costo, essendo disposta a pagare rate annuali non superiori a K milioni di euro, ad un tasso annuo i.

1. Quanti anni N son necessari per rimborsare il debito con un rimborso a rata costante? Qual è l'importo della rata R?
2. Riportare la prima quota capitale C_1 e quota interessi I_1.

[Dati: K=2.5, i=12%]

Svolgimento

1. *Sia x =[ln(1+r*D/K)]/lnd* [Vedi esercizio 19] dove D=10 e $d=(1+i)^{-1}$

allora il numero N è uguale al più piccolo numero intero maggiore di X. La rata R si ottiene con $R=D/(a_{N\neg i})$ => $R=(D*i)/(1-d^N)$

2. $I_1=i*D$, $C_1=R-I_1$,

- ***ESERCIZIO 26a e 26b [DOMANDA TEORICA] (in neretto la risposta esatta)***

Testo a
Quale delle seguenti obbligazioni risulta più sensibile rispetto alle variazioni dei tassi d'interesse?

a) Coupon Bond con scadenza 10 anni e TAN 10%.
b) Zero Coupon Bon con scadenza a 10 anni.
c) Zero Coupon Bond con scadenza 1 anno.
d) Coupon Bond con scadenza 2 anni e TAN 5%.

Testo b
Il valore attuale di un titolo che paga cedole costanti I e rimborsa il capitale a scadenza è $V_0=I/(1+r)+ I/(1+r)^2+.....+ I/(1+r)^n$

> ***Dimostrare che il valore attuale di un titolo quota alla pari, il TIR è pari al tasso cedolare I/C:***

Se il titolo quota alla pari il suo valore coincide con C quindi

$C= I*(1-d^n)/r+C*d^n$ [dove $d=(1+i)^{-1}$]
$C-C*d^n= I*(1-d^n)/r$ => $C*(1-d^n)= I*(1-d^n)/r$ dividendo entrambi i membri per *"$1-d^n$"* otteniamo
$C=I*r$ => $C/I=r$

- ***ESERCIZIO 27***

Testo

La seguente tabella riporta i pagamenti di 4 obbligazioni:

	A	**B**	**C**	**D**
Anno 1	10	5	0	0
Anno 2	10	105	100	0
Anno 3	110	0	0	100

Considerare una struttura per scadenza dei tassi d'interesse costante al livello r, determinare:

1. ***I prezzi di ciascuna obbligazione.***
2. ***La Duration di ciascuna obbligazione***
3. ***Quale obbligazione è più sensibile alle variazioni di rendimento.***
4. ***Supponete di dover pagare un capitale "X" tra due anni e mezzo. Auanto denaro occorre investire nei titoli C e D per ottenere un portafoglio immunizzato?***
5. ***Volendo utilizzare per l'immunizzazione un'obbligazione diversa dalla C, mantenendo invece la D, potreste utilizzare l'obbligazione A? E l'obbligazione B?***

[Dati: r=20%, X=1 milione di €]

Svolgimento

1. $P_A=10*(1+r)^{-1}+10*(1+r)^{-2}+110*(1+r)^{-3}$ => $P_A=78,93$
   $P_B=5*(1+r)^{-1}+105*(1+r)^{-2}$ => $P_B=77,08$
   $P_C=100*(1+r)^{-2}$ => $P_C=69,44$
   $P_D=100*(1+r)^{-3}$

2. $D_A=[1*10*(1+r)^{-1}+2*10*(1+r)^{-2}+3*110*(1+r)^{-3}]/ P_A$

$D_B=[1*5*(1+r)^{-1}+105*(1+r)^{-2}]/ P_B$
$D_C=2$
$D_D=3$

3. L'obbligazione D avendo la Duration maggiore è quella più sensibile

4. Per risolvere il problema dell'immunizzazione bisogna impostare il seguente sistema

$X_C+X_D=V_0$
=> dove $V_0=X*(1+r)^{-2,5}$
$2*X_C+3*X_D=2,5*V_0$

da cui si trova: $X_C=V_0/2$ e $X_D=V_0/2$

5. Occorre che la Duration della seconda obbligazione sia minore di 2,5 quindi l'obbligazione B va sempre bene, mentre per l'obbligazione A dipende dal valore di r.

- ***ESERCIZIO 28 [DOMANDA TEORICA] (in neretto la risposta esatta)***

Un gestore di un portafoglio obbligazionario prevede un futuro abbassamento del livello dei tassi di interesse. Quale delle seguenti azioni è la conseguenza più plausibile:

(a) Vendere immediatamente tutto e investire in titoli azionari
(b) Alzare la duration del portafoglio
(c) Abbassare la duration del portafoglio

- ***ESERCIZIO 29 [DOMANDA TEORICA] (in neretto la risposta esatta)***

Se si prevede uno scenario futuro di abbassamento dei tassi di interesse, quale delle seguenti azioni risulta preferibile?

(a) Vendere BOT a 1 anno ed acquistare CCT a 10 anni
(b) Vendere BOT a 1 anno ed acquistare BTP a 10 anni (per aumentare la duration)
(c) Vendere CCT a 10 anni ed acquistare BOT a 1 anno

- ***ESERCIZIO 30***

Si consideri un BTP con vita residua 18 mesi che paga cedole semestrali al tasso nominale 7%. Sapendo che gli ZCB con scadenza 6 mesi, 1 anno e 18 mesi hanno rispettivamente prezzo P_1=97.56, P_2=95.13 e P_3=92.75 determinare il prezzo P e la duration D. Si assume per tutti i titoli un valore nominale pari a 100.

Svolgimento:

Flusso BTP = (3.5, 3.5, 103.5)|(0.5, 1, 1.5)

Prezzo $P = \Sigma X_k V(0,t_k)$ $\qquad\qquad$ $D = [\Sigma\ t_k\ X_h V(0,t_k)] / P$

Ricaviamo $V(0,t_k)$ da ZCB:
$V(0, 0.5) = P_1/100 = 0.9756$
$V(0, 1) = P_2/100 = 0.9513$
$V(0, 1.5) = P_3/100 = 0.9275$

Risposta: **P = 102.74 $\qquad$ D = 1.45**

- **ESERCIZIO 31**

In un piano di ammortamento a quota capitale costante il numero di rate è n = 24, il debito iniziale D = 2000 e la prima rata R_1 = 163.33.

Svolgimento:

Quota capitale QC = D/n = 2000/24 = 83.33

$QI_1 = R_1 - QC = 163.33 - 83.33 = 80$

$i = QI_1/D = 80/2000 = 4\%$

Debito residuo tempo 1 $D_1 = D - QC = 1916.66$

$QI_2 = i \cdot D_1 = 0.04 \cdot 1916.66 = 76.66$

$R_2 = QC + QI_2 = 83.33 + 76.66 = 160$

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

– 3. STRUTTURA A TERMINE DEI TASSI DI INTERESSE *[CAP IV del libro "FINANZA E INVESTIMENTI" autore D.G. LUENBERGER]*

3.1 INTRODUZIONE

La teoria che andiamo ora ad esaminare ammette l'esistenza contemporanea di una serie di tassi di interesse, uno per ogni data scadenza, consentendo una comprensione più chiara del mercato dei tassi di interesse e lo sviluppo di tecniche più sofisticate per l'analisi degli investimenti.

3.2 CURVA DEI RENDIMENTI

Il rendimento alla scadenza di un'obbligazione è direttamente legato alle condizioni generali del mercato dei titoli a rendimento certo, nel quale tutti i rendimenti tendono a variare insieme, *ma i rendimenti delle obbligazioni non sono tutti esattamente uguali.*
Le differenze tra i rendimenti delle obbligazioni si spiegano in parte con il fatto che esse sono classificate diversamente in maniera *QUALITATIVA: è naturale che l'alta qualità sia più costosa di quella bassa* e quindi ci si aspetta che un'obbligazione con rating AAA costi di più ed abbia quindi un rendimento minore rispetto ad un'obbligazione con rating B.
Anche la *DURATA contribuisce a spiegare le differenze tra i rendimenti delle diverse obbligazioni,* aspettandoci così che obbligazioni "lunghe" tendano ad offrire rendimenti maggiori di quelle "brevi" della stessa qualità.
Unendo queste considerazioni possiamo rappresentare graficamente la situazione attraverso la *CURVA DEI RENDIMENTI (YIELD CURVE) nella quale il rendimento è rappresentato come una funzione della durata.*
A partire dalle nostre considerazioni allora i *rendimenti configurano una curva che sale gradualmente all'aumentare della durata: l'andamento CRESCENTE è la "forma normale" della curva dei rendimenti,* cioè quella che si verifica più frequentemente.
Nel caso in cui le obbligazioni lunghe hanno rendimenti minori di quelle brevi allora avremo come risultato la *CURVA DEI RENDIMENTI INVERSA* che tende a manifestarsi quando i tassi a breve termine crescono rapidamente e gli investitori ritengono che la crescita sia temporanea, cosicché i tassi a lungo termine non subiscono variazioni significative.

3.3 STRUTTURA A TERMINE

La *teoria della struttura a termine* accantona la concezione di rendimento per concentrarsi sui *tassi di interesse puri* ed è basata ed è basata sull'osservazione che *il tasso di interesse dipende dalla durata del periodo per il quale il denaro viene trattenuto*.

3.4 TASSI SPOT

I *tassi spot* sono *i tassi di interesse di base* che definiscono la struttura a termine; il tasso spot $s_t = r(t_0, t)$ *è il tasso di interesse, espresso in termini annui, applicato al denaro trattenuto in prestito dal momento attuale (t_0=0) al momento t.*
Nella fattispecie si avrà:

- $s_1 = r(0, 1)$ che è il tasso di interesse a un anno, ovvero quel tasso applicato al denaro trattenuto un anno [è il prezzo di uno ZCB unitario in o con scadenza 1].
- $s_2 = r(0, 2)$ che è il tasso di interesse applicato al denaro trattenuto 2 anni, espresso comunque su base annua [è il prezzo di uno ZCB unitario in o con scadenza 2]

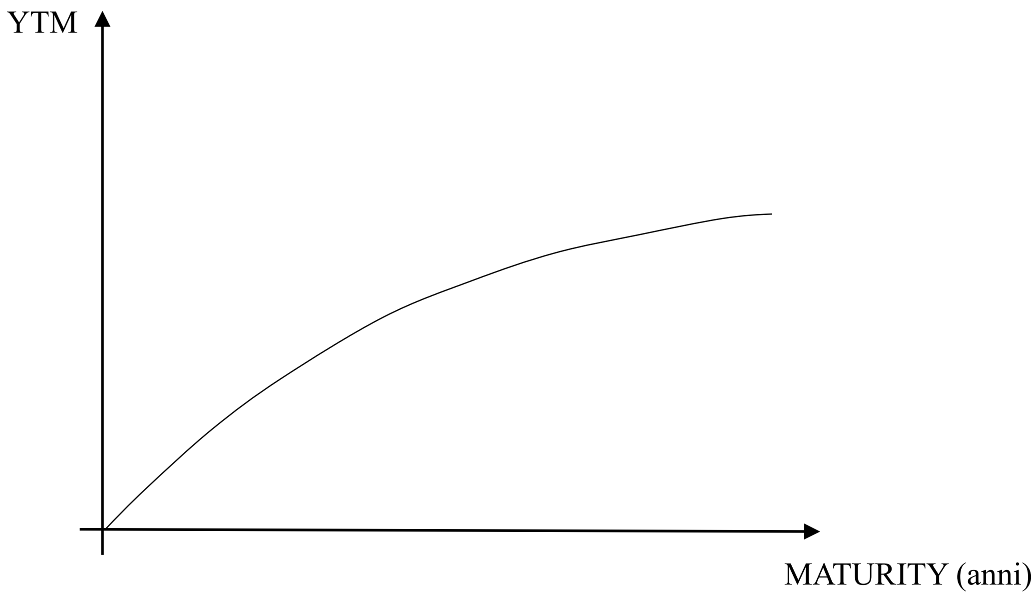
La definizione di tasso spot presuppone però una convenzione di capitalizzazione che può variare a seconda dell'obittivo considerato.
Le varie possibilità riguardo la capitalizzazione del tasso spot possono essere:

- *ANNUALE* => il tasso spot S_t è definito in modo tale che $(1+s_t)^t = [1+r(t_0, t)]^{(t-t_0)}$

- *m PERIODI L'ANNO* => il tasso spot S_t è definito in modo tale che
  $(1+ S_{t/m})^{mt} = [1+ r(t_0, t)/m]^{m\ (t-t_0)}$

- *CONTINUA* => il tasso spot S_t è definito in modo tale che $e^{s_t t} = e^{r(t_0, t)(t-t_0)}$ sul fattore di crescita corrispondente.

In teoria è possibile misurare i tassi spot registrando i rendimenti delle obbligaizoni zero coupon: *un obbligazione zero coupon promette il pagamento di un importo stabilito in una data futura stabilita e quindi il rapporto tra IMPORTO DEL PAGAMENTO e PREZZO ATTUALE definisce il tasso spot rispetto alla scadenza dell'obbligazione.*
Attraverso questa procedura di misurazione possiamo sviluppare una *CURVA DEI TASSI SPOT* analoga a quella dei rendimenti.



3.5 FATTORI DI SCONTO E VALORE ATTUALE

Una volta determinati i tassi spot è naturale definire i *fattori di sconto* $d(t_0, t)$ corrispondenti a ciascun tipo temporale, ossia *i fattori per i quali occorre moltiplicare i flussi di cassa futuri in modo da ottenere un valore attuale equivalente.*
Per le diverse convenzioni di capitalizzazione definiamo i fattori di sconto in modo seguente:

- *ANNUALE* => per la capitalizzazione annuale $d(t_0, t) = [1+r(t_0, t)]^{-(t-t_0)}$
- *m PERIODI L'ANNO* => per lacapitalizzazione su *m* $d(t_0, t) = [1+ r(t_0, t)/m]^{-m(t-t_0)}$
- *CONTINUA* => per la capitalizzazione continua $d(t_0, t) = e^{-r(t_0, t)(t-t_0)}$

I fattori di sconto trasformano direttamente i flussi di cassa futuri in valori attuali equivalenti, quindi data una qualsiasi successione di flussi di cassa $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, il *VALORE ATTUALE RELATIVO AI TASSI SPOT EQUIVALENTI E':*

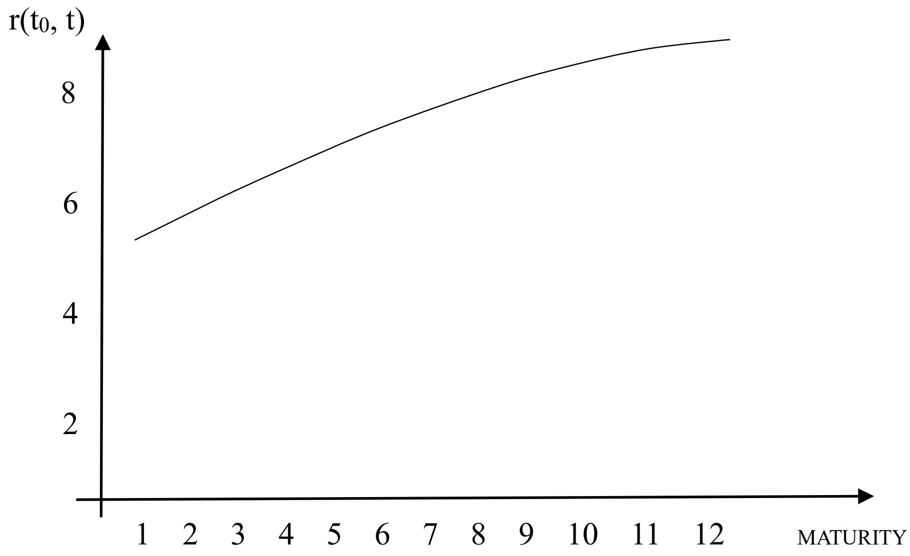
$$VA = x_0 + x_1\, d(t_0, t_1) + x_2\, d(t_0, t_2) + \ldots + x_n\, d(t_0, t_n)$$

Il fattore di sconto $d(t_0, t)$ rappresenta il prezzo del denaro ricevuto nel momento t.
Il valore di una successione si determina sommando i prodotti *"prezzo x quantità"* di tutte le componenti della successione stessa.

ESEMPIO 1:

Data la seguente tabella dei tassi spot determinare il valore di un'obbligazione all'8% con scadenza a 10 anni.
Anche se normalmente per le obbligazioni utilizziamo tassi e formule valide per la capitalizzazione semestrale, assumiamo ora che le cedole vengano pagate solo alla fine dell'anno.

ANNI	TASSI SPOT
1	5.571
2	6.088
3	6.555
4	6.878
5	7.361
6	7.707
7	8.020
8	8.304
9	8.561
10	8.783
11	9.003
12	9.183



A partire dai tassi spot calcoleremo i corrispondenti fattori di sconto $d(t_0, t)$ ed attualizzeremo poi il nostro flusso di cassa in 0

ANNO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SCONTO	0.947	0.889	0.872	0.764	0.701	0.641	0.588	0.528	0.447	0.431

FLUSSO DI CASSA	8	8	8	8	8	8	8	8	8	108
V A	7.58	7.11	6.61	6.11	5.61	5.12	4.66	4.22	3.82	46.5
TOT V A	97.34									

3.6 DETERMINAZIONE DELLA RATA

Supponiamo di aver contratto un debito D = 1M € da dover rimborsare in 3 anni; allora calcoleremo la rata analogamente al caso in cui supponiamo che il tasso di interesse si mantenga costante, ma sostituendo l'opportuno fattore di sconto. Ora quindi non potrà più essere utilizzato al denominatore $a_{\overline{n}|\,r}$.

Costruiamo la rata in modo tale che $Rd(0, 1) + Rd(0, 2) + Rd(0, 3) = D$ quindi

$$R = D \,/\, \sum_{k=1}^{3} d(0, t_k)$$

Continuando con i dati dell'esempio 1 avremo quindi che

$$R = D \,/\, \sum_{k=1}^{3} d(0, t_k) = 1.000.000 \,/\, (0{,}947 + 0{,}889 + 0{,}827) =$$

$$= 1.000.000 \,/\, 2{,}663 = 375.516{,}335$$

3.7 DETERMINAZIONE DEL TASSO SPOT

Il modo più ovvio per determinare la curva dei tassi spot consiste nel trovare i prezzi di una serie di obbligazioni zero coupon aventi durate differenti; purtroppo le obbligazioni zero coupon disponibili sono piuttosto scarse e non è sempre pratico determinare una serie completa di tassi spot in questo modo.
L'esistenza di obbligazioni zero coupon non è però essenziale affinchè il concetto di tasso spot sia utile, né tali obbligazioni sono necessarie per determinare il valore del tasso spot.
E' possibile determinare la curva dei tassi spot sulla base dei prezzi delle obbligazioni con cedole, iniziando da quelle di breve durata e procedendo verso quelle a lungo termine.
Determineremo quindi il tasso spot avendo opportunamente calcolato il fattore di sconto, partendo dalle informazioni sulla obbligazione.
Supponiamo di osservare il prezzo di N obbligazioni $(P_1, P_2, \ldots, P_N) = \underline{P}$; l'obbligazione $i (i = 1, \ldots, N)$ paga cedola a_{ij} (rappresenta il flusso dell'obbligazione i) all'istante t_j $(j = 1, \ldots, m)$ e supponiamo di avere per le obbligazioni una scadenza comune
Se P_1 è il prezzo di mercato della prima obbligazione, allora questo dovrà essere pari al valore attuale dei pagamenti dell'obbligazione:

$P_1 = a_{1,1} d_1 + a_{1.2} d_2 + \ldots + a_{1,m} d_m$

E dovrò quindi trovare i fattori di sconto impliciti nell'obbligazione
Dovrò poi eseguire lo stesso procedimento per tutte le obbligazioni

$$P_k = a_{k,1} d_1 + a_{k,2} d_2 + \ldots + a_{k,m} d_m$$

Ottenendo alla fine un *sistema lineare* di N equazioni in m incognite:

$A \underline{d} = \underline{P}$ con $A = N * m$
$d = m * 1$
$P = N * 1$

Applicando il *teorema di Rouche-Capelli,* che ci permette di calcolare il numero di soluzioni di un sistema di equazioni lineari in funzione del *rango* di alcune matrici, allora *troveremo il rango della MATRICE DEI COEFFICIENTI (A) e la confronteremo con il rango della MATRICE COMPLETA (A|P).*
Il sistema ammette soluzioni solamente se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa e cioè:

$$rg(A) = rg(A|P) = k$$

nel caso del nostro esempio abbiamo ∞^{m-k} soluzioni.
Nella pratica, disponendo di un numero di obbligazioni elevato rispetto alla scadenza e cioè al numero di incognite da trovare, avremo che il *rango della matrice dei coefficienti (A) sarà più piccolo del rango della matrice completa (A|P)* ma avremo un numero di fattori di sconto troppo inferiore rispetto al numero delle obbligazioni e per calcolarli cercheremo di minimizzare lo scarto quadratico medio.
**si avrà un'unica soluzione quando* $rg(A) = rg(A|P) = k$ e $m = k$

3.8 TASSO PAR YIELD (TASSO DI PARITA')

E' il tasso di interesse al quale occorrerebbe emettere un titolo coupon bond perché il mercato lo quoti alla pari oggi.
Disponendo dei titoli di sconto allora il *tasso di parità* sarà quel tasso per cui un flusso del tipo

$$(-C, I, I, \ldots, I + C) \mid (0, 1, 2, \ldots, n)$$

avrà $VA = 0$ o analogamente $Id(0,1) + Id(0,2) + \ldots + Id(0,n) + Cd(0,n) = C$

Essendo quindi a conoscenza dei rispettivi tassi spot e quindi dei fattori di sconto ??? corrispondenti, sarà possibile determinare l'opportuna cedola del titolo coupon bond:

$$I[d(0, 1) + d(0, 2) + \ldots + d(0, n)] + Cd(0, n) = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = [C - Cd(0, n)] / [d(0, 1) + d(0, 2) + \ldots + d(0, n)] \Rightarrow$$

$$=> \; I = \{C[1 - d(0, n)]\} \,/\, [d(0, 1) + d(0, 2) + \ldots + d(0, n)]$$

Il corrispondente tasso cedolare calcolato come rapporto tra I e C corrisponderà al *tasso di parità*, corrispondete a sua volta all'intera durata dell'obbligazione.

NB: per il calcolo di tassi di parità di durata inferiore sarà necessario arrestare il processo di attualizzazione all'istante desiderato e calcolare poi il tasso di parità

NB 2: Il rapporto I/C sarà un tasso cedolare riferito alla tipologia di capitalizzazione specifica, quindi dovrà essere moltiplicato per l'opportuno m se si vuole rappresentare un tasso di parità annuale.

3.9 TASSI FORWARD

Dalla definizione di tasso spot emerge direttamente il concetto di tasso forward: *i tassi forward sono tassi di interesse applicati a denaro che verrà preso in prestito tra due date future, ma a condizioni concordate oggi.*
Per la precedente definizione, considerando uno ZCB unitario, definiamo $d(t_0, T_1, T_2)$ *il prezzo a termine stabilito in* t_0 *e da pagarsi in* T_1 *per lo ZCB unitario che scade in* T_2 *(che ha maturato in* T_1*) e ci permette quindi di fissare il tasso di interesse tra* T_1 *e* T_2*.*
Per spiegare il concetto di tassi forward e la relazione tra *prezzi a pronti* e *prezzi a termine* utilizziamo il seguente caso: supponiamo di essere in t_0 e di volere 1€ in T_2; disponiamo di due strstegie che conducono al medesimo risultato, ossia

	t_0	T_1	T_2
a) compro a pronti uno ZCB unitario che scade in T_2, quindi pago - $d(t_0, T_2)$ e ricevo 1 in T_2	$-d(t_0, T_2)$	0	1
b) posso comprare a termine con consegna in T_1 uno ZCB unitario che scade in T_2 ad un prezzo stabilito in t_0 e pari a $d(t_0, T_1, T_2)$	0	$d(t_0, T_1, T_2)$	-1

	t_0	T_1	T_2
Voglio poter disporre in T_1 di un ammontare pari alla spesa $d(t_0, T_1, T_2)$ e compro a pronti al prezzo $d(t_0, T_1)$ una quantità pari a $d(t_0, T_1, T_2)$ di ZCB unitario con scadenza in T_1	$-d(t_0, T_1)d(t_0, T_1, T_2)$	$d(t_0, T_1, T_2)$	0

Applichiamo ora il *principio di confronto* poiché disponiamo di due metodi alternativi che ci consento entramb di avere 1€ in T_2. Confrontiamo quindi i prezzi delle due strategie:
PREZZO STRATEGIA "a" = $d(t_0, T_2)$
PREZZO STRATEGIA "b" = $d(t_0, T_1)d(t_0, T_1, T_2)$

Quindi $d(t_0, T_2) = d(t_0, T_1)d(t_0, T_1, T_2)$ *esprime la relazione tra prezzo a pronti e prezzo a termine* oppure espressa come $d(t_0, T_1, T_2) = d(t_0, T_2) / d(t_0, T_1)$ *e cioè il prezzo a termine è ottenuto capitalizzando per il fattore montante del periodo di acquisto il prezzo a pronti tra* t_0 e T_2

Discende inoltre dalla relazione che *prezzo a termine > prezzo a pronti*

e che $d(t_0, T_1, T_2) > d(t_0, T_2)$

Giustifichiamo l'impiego del metodo del confronto attraverso il *principio di arbitraggio* che consiste essenzialmente nel *vendere ciò che costa di più ed acquistare ciò che costa meno*, esisterebbe cioè l'opportunità di realizzare un profitto di arbitraggio.
Potrei infatti vendere al prezzo $d(t_0, T_2)$ sapendo di dover rimborsare 1 in T_2 e ricavare tale 1 da rimborsare in T_2 attraverso l'implementazione della seconda strategia e cioè *pagando* $d(t_0, T_1)d(t_0, T_1, T_2)$.
Alla fine riuscirò ad ottenere la differenza $d(t_0, T_2) - d(t_0, T_1)d(t_0, T_1, T_2)$

Assumeremo che nel mercato non sia possibile implementare questo schema, dato che i potenziali speculatori sono sempre alla ricerca di simili discrepanze e, quando si presentano, vengono subito sfruttate, riportando a zero il divario tra i tassi.
Come per i tassi spot, anche per i tassi forward è possibile fornire una definizione:
Il tasso forward tra i momenti T_1 e T_2 è denotato da $r(t_0, T_1, T_2)$ ed è il tasso a termine stabilito in t_0 e valido tra T_1 e T_2.
E' quindi il tasso di interesse applicato al denaro preso in prestito al momento T_1 e da restituire con gli interessi al momento T_2.

3.10 DETERMINAZIONE DEI TASSI FORWARD

Per determinare i tassi forward occorrerà dapprima determinare il fattore di sconto a termine e successivamente determinare da questo il corrispondente tasso forward.
Infatti data la *relazione generale* $d(t_0, T_2) = d(t_0, T_1)d(t_0, T_1, T_2)$ allora basterà conoscere i fattori di sconto a pronti $d(t_0, T_2)$ e $d(t_0, T_1)$, calcolare poi il rapporto tra $d(t_0, T_2) / d(t_0, T_1) =$ $= d(t_0, T_1, T_2)$, pari cioè al fattore di sconto a termine e poi estrarre il corrispondente tasso forward dalla relazione:

$$d(t_0, T_1,T_2) = [1 + r(t_0, T_1, T_2)]^{-(T_2-T_1)} \Rightarrow r(t_0, T_1, T_2) = 1 / [d(t_0, T_1, T_2)^{(T_2-T_1)}] – 1$$

Una formulazione più generale è quella in riferimento alle diverse convenzionidi capitalizzazione :

– *ANNUALE per* $t_0 < T_1 < T_2$
$$d(t_0, T_2) = d(t_0, T_1)d(t_0, T_1, T_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [1 + r(t_0, T_2)]^{-(T_2-t_0)} = [1 + r(t_0, T_1)]^{-(T_1-t_0)} * [1 + r(t_0, T_1, T_2)]^{-(T_2-T_1)}$$

- *m PERIODI L'ANNO per* $t_0 < T_1 < T_2$ *espressi in periodi, varrà sempre la relazione* $d(t_0, T_2) = d(t_0, T_1)d(t_0, T_1, T_2) \Rightarrow$
  $\Rightarrow [1 + r(t_0, T_2)/m]^{-(T_2 - t_0)} = [1 + r(t_0, T_1)/m]^{-(T_1 - t_0)} * [1 + r(t_0, T_1, T_2)/m]^{-(T_2 - T_1)}$

- *CONTINUA per* $t_0 < T_1 < T_2$ *definiti per ogni* t_0, T_1, T_2 *varrà* $d(t_0, T_2) = d(t_0, T_1)d(t_0, T_1, T_2) \Rightarrow$
  $\Rightarrow e^{-r(t_0, T_2)(T_2 - t_0)} = e^{-r(t_0, T_1)(T_1 - t_0)} * e^{-r(t_0, T_1, T_2)(T_2 - T_1)}$

Quindi semplicemente $-r(t_0, T_2)(T_2 - t_0) = -r(t_0, T_1)(T_1 - t_0) - r(t_0, T_1, T_2)(T_2 - T_1) \Rightarrow$
$\Rightarrow r(t_0, T_1, T_2) = [r(t_0, T_2)(T_2 - t_0) - r(t_0, T_1)(T_1 - t_0)] / (T_2 - T_1)$

ESEMPIO 2

Calcolo tasso forward :

$r(0, 1) = 7\ \%$ $\qquad r(0, 2) = 8\%$ $\qquad r(0, 1, 2) = ?$

$d(0, 1) = [1 + r(0, 1)]^{-1} = (1.07)^{-1}$ $\qquad d(0, 2) = [1 + r(0, 2)]^{-2} = (1,08)^{-2}$

Relazione generale $d(t_0, T_2) = d(t_0, T_1)d(t_0, T_1, T_2) \Rightarrow d(0, 2) = d(0, 1)d(0, 1, 2)$

$d(0, 1, 2) = d(0, 2)/d(0, 1) = (1,08)^{-2}/(1.07)^{-1} = 0,9173$

Ed essendo $d(0, 1, 2) = [1 + r(0, 1, 2)]^{-1} \Rightarrow r(0, 1, 2) = 1/d(0, 1, 2) - 1 = 9.01\%$

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

3.11 SPIEGAZIONI PER LA STRUTTURA A TERMINE

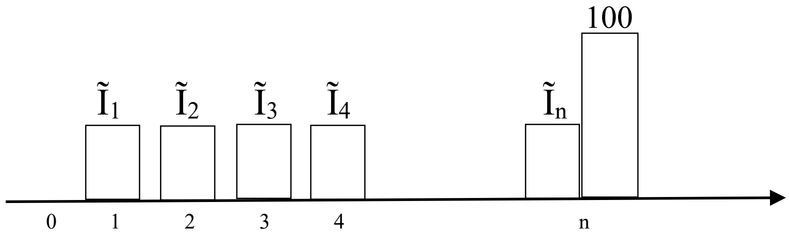
La curva dei rendimenti non è quasi mai orizzontale e di solito sale gradualmente all'aumentare della durata. Anche la curva dei tassi spot ha caratteristiche simili, tipicamente molto inclinata verso l'alto per le brevi durate e continua ad essere inclinata, ma in misura minore, a mano a mano che la durata si allunga.
Vi sono diverse spiegazioni sul perché la curva non sia semplicemente orizzontale, di cui una è la *teoria della aspettative.*

- **TEORIA DELLE ASPETTATIVE**
  Secondo questa teoria *i tassi spot sono determinati dalle aspettative sui tassi di interesse futuri.* Supponiamo che, come nella normalità, la curva dei tassi spot sia inclinata verso l'alto; il tasso spot a 2 anni è quindi maggiore di quello ad 1 anno.
  Secondo questa teoria ciò dipende dal fatto che *il mercato ritiene probabile che l'anno prossimo il tasso ad 1 anno sarà più elevato* (convinzione da attribuire probabilmente al presentimento che l'inflazione aumenterà e quindi, per poter mantenere il tasso di interesse reale costante, il tasso nominale dovrà aumentare).
  QUESTA CONVINZIONE DIFFUSA SI TRADUCE IN UN'ASPETTATIVA DEL MERCATO E SI CONCRETIZZA CON L'IPOTESI DELLE ASPETTATIVE: consideriamo *il tasso forward* $r(0, 1, 2)$, ovvero il tasso implicito per il denaro prestato per 1 anno, tra 1 anno.
  SECONDO L'IPOTESI DELLE ASPETTATIVE TALE TASSO FORWARD E' ESATTAMENTE UGUALE AL TASSO SPOT A 1 ANNO CHE IL MERCATO SI ATTENDE PER IL PROSSIMO ANNO.
  Per l'esempio 2 di cui sopra, $r(0, 1, 2) = 9.01\%$ *è il tasso spot* $r'(1, 2)$ *a 1 anno che il mercato si attende per il prossimo anno.*
  Questa teoria manifesta però alcune debolezze: infatti, secondo questa spiegazione, *il mercato si attende che i tassi aumentino ogni volta che la curva dei tassi spot sia inclinata verso l'alto, cioè praticamente sempre. Quindi le aspettative non possono essere corrette dato che i tassi non crescono tanto spesso, quanto le aspettative implicherebbero.*

3.12 OBBLIGAZIONI A TASSO VARIABILE

Le obbligazioni a tasso variabile hanno valore nominale e scadenza fissi, ma *le cedole sono legate ai TASSI DI INTERESSE SHORT correnti.*
I tassi di interersse short (o tassi a breve) sono tassi forward relativi ad un singolo periodo. Il tasso short a rendimento k è quindi $r_k = r(t_0, t_k, t_{k+1})$ e cioè il tasso forward per il periodo da k a $k+1$.
I tassi short possono essere considerati fondamentali come i tassi spot, dato che una serie completa di tassi short specifica in modo completo una struttura a termine.

- Consideriamo ad esempio un CCT che paga cedole semestrali (come il BTP), l'importo delle quali è aleatorio inizialmente e sarà noto solamente sei mesi prima di ciascun pagamento. Ciascuna cedola sarà stabilita con riferimento al tasso di interesse, noto nell'istante prima e che sarà valido fino all'istante seguente, ad esempio



$\tilde{I} = \tilde{\imath}(2, 3) \cdot 100$ *con* $\tilde{\imath}(2, 3)$ *tasso di interesse a pronti noto in* T_2 *e valido fino in* T_3

Il tasso di interesse viene preso andando a vedere *i prezzi di assegnazione dei BOT all'emissione.*

- Consideriamo ad esempio un *mutuo a tasso variabile.*
  Per andare a costruire il piano di ammortamento ricordiamo che la rata si vedrà composta da *quota di interesse* (che dipenderà al punto dal tasso di interesse, facendo riferimento al *TASSO EURIBOR,* noto giorno per giorno per diverse maturity + uno spread compreso tra 100 e 200 bp) e dalla *QUOTA CAPITALE*

  PIANO DI AMMORTAMENTO

Periodo	Debito	Quota interessi	Quota capitale	Rata
K	D	I	C	R
0	D_0	I_0	C_0	R_0
1	$D_1=D_0-C_1$	$I_1=i(0,1)D_0$	C_1	C_1+I_1
2	$D_2=D_1-C_2$	$I_2=i(1,2)D_1$	C_2	$C_{2+}I_2$
3	$D_3=D_2-C_3$	$I_3=i(2,3)D_2$	C_3	$C_{3+}I_3$

Il calcolo del VA di un oggetto i cui importi sono aleatori ci consente di stabilire un metodo di determinazione di importi aleatori. Procederemo illustrando una *strategia di investimento*, quella di investire $d(0, 1)$ in 0 e di ottenere $1/d(1, 2)$ in 2. L'aleatorietà è data dal fatto che anche se sappiamo ottenere $1/d(1, 2)$ vogliamo valutare in 0 un titolo che paga $1/d(1, 2)$ nel periodo 2.

	0	1	2
• In 0 compro a pronti uno ZCB unitario con scadenza in 1 pagandolo $d(0, 1)$	$- d(0, 1)$	1	0
• Reinvesto l'euro disponibile in 1 nell' acquisto di un titolo che scade in 2; il prezzo di questo titolo è $d(1, 2)$, quindi ne acquisto un numero $1/d(1, 2)$ che corrisponderà a ciò che ottengo in 2	0	-1	$1/d(1, 2)$

• Vendo uno ZCB unitario in 0 sapendo di dover restituire 1 in 2 ed ottenendo in 0 $d(0, 2)$	$d(0, 2)$	0	1

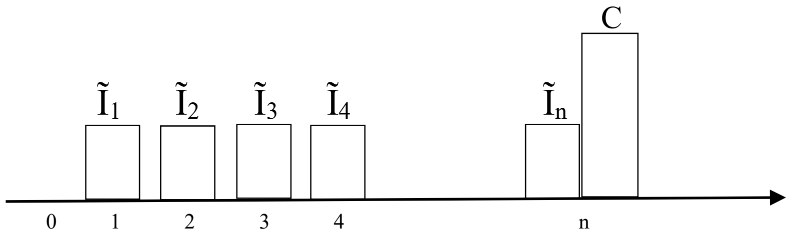
Combinando quindi i 3 passaggi vediamo come a fronte di una spesa complessiva $d(0, 1)-d(0, 2)$ in 0 riusciamo ad ottenere in 2 $1/d(1, 2) - 1 = 1 + i(1, 2) - 1 = i(1, 2)$	...	...	$1/d(1, 2) =$ $= i(1, 2)$

Quindi $V_0[i(1, 2)] = d(0, 1) - d(0, 2)$

Risulterà ora immediato che, ad esempio, per un importo aleatorio $\tilde{I}_k = i(k\text{-}1, k) \cdot C$ allora potrà essere determinato in 0 il valore di tale importo nel modo seguente:

$$VA(\tilde{I}_k) = VA[i(k\text{-}1, k) \cdot C] = C \cdot [d(0, k\text{-}1) - d(0, k)]$$

<u>3.13 CALCOLO VA DI UN TITOLO (CCT) CON IMPORTI CEDOLE ALEAOTORI</u>



Volendo calcolare il VA del flusso andremo ad effettuare la somma dei valori attuali. Il generico importo aleatorio $\tilde{I}_k = \tilde{\imath}\,(k\text{-}1, k) \cdot C$ $\{es.\ k=2 \;\Rightarrow\; \tilde{I}_2 = i(1, 2) \cdot C\}$ quindi sarà

$$V_0 = V_0(\tilde{I}_2) + V_0(\tilde{I}_3) + \dots + V_0(\tilde{I}_n) + V_0(C) =$$

$$= C[d(0, 1) - d(0, 2)] + C[d(0, 2) - d(0, 3)] + \dots + C[d(0, n\text{-}1) - d(0, n)] + C[d(0, n)] =$$

$$= C[d(0, 1) - d(0, 2) + d(0, 2) - d(0, 3) + \dots + d(0, n\text{-}1) - d(0, n) + d(0, n) =$$

$$= C \cdot d(0, 1)$$

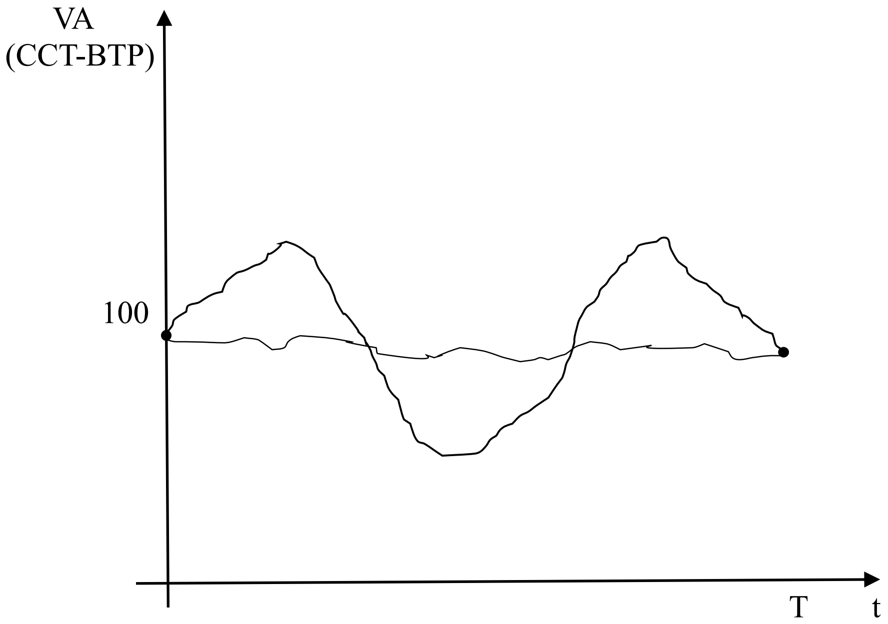
Per completare il calcolo del VA occorrerà inserire il VA della prima rata il cui importo non sarà aleatorio perché in 0 già conosciamo $i(0, 1)$:

$I_1 = C \cdot i(0, 1) \;\Rightarrow\; V_0(I_1) = I_1 \cdot d(0, 1) = C \cdot i(0, 1) \cdot d(0, 1)$ e quindi il VA complessivo

$$VA = C \cdot d(0, 1) + C \cdot i(0, 1) \cdot d(0, 1) = C \cdot d(0, 1)[1 + i(0, 1)] =$$

$$= C \cdot 1/1 + i(0, 1) \cdot [1 + i(0, 1)] = C$$

UN TITOLO A TASSO VARIABILE QUOTA SEMPRE ALLA PARI IN 0 ED IN OGNI ISTANTE DI RICALCOLO DELLA CEDOLA.
Dal punto di vista del VA è più stabile un titolo a tasso variabile rispetto ad un titolo a tasso fisso



Notiamo come per il CCT il valore tra un istante di ricalcolo e l'altro può variare riportandosi però su C in corrispondenza esatta del ricalcolo.
Quindi anche la *duration* di un titolo a tasso variabile come il CCT sarà *molto piccola* ed al massimo pari alla "distanza" che manca dal prossimo stacco cedola (6 mesi).
Notiamo invece come il VA del BTP sia fortemente influenzato dalle oscillazioni del tasso di interesse e possa portarsi anche a significativi scostamenti da C.

3.14 CONTRATTO DERIVATO SUI TASSI DI INTERESSE

FRA (FORWARD RATE AGREEMENT)

Il contratto *FRA* viene stabilito in questa maniera: si fissa un capitale molto alto *(es.* $C = 1M$*)* ed una parte *(gamba fissa o fixed leg)* si impegna pagare un interesse fisso al tasso FRA mentre l'altra parte *(gamba variabile o floating leg)* paga l'interesse variabile che sarà noto solo tra 3 mesi, corrispondendo quindi $[i(3m, 6m) \cdot C]$.
Allo scadere dei 6 mesi verrà pagata solamente la differenza della quota interesse tra le 2 gambe.

Supponiamo che il tasso FRA *3X6* $= 2.85\%$; allora la gamba fissa si impegnerà a dare tra 6 mesi un interesse del 2.85% su un capitale di $1M$ € alla gamba variabile.
Si potranno ora verificare 2 diveersi casi:

SE *tasso che si verifica tra 3 mesi (EURIBOR) 2.5%* < *tasso FRA 3X6 2.85%* => *la gamba variabile guadagna lo 0.35%*

SE *tasso che si verifica tra 3 mesi (EURIBOR) 3%* > *tasso FRA 3X6 2.85%* => *la gamba fissa guadagna lo 0.15%*

3.15 CALCOLO TASSO FRA

Il tasso FRA è quel tasso che rende il V_0 dell'interesse della gamba fissa esattamente uguale al V_0 della gamba variabile.
Questo perché in 0 non c'è scambio di denaro e cioè il capitale è solamente fissato, ma non scambiato.

$$\left.\begin{array}{l} V_0(float) = V_0[i(1, 2) \cdot C] = C[d(0, 1) - d(0, 2)] \\ V_0(fix) = V_0(f \cdot C) = C \cdot f \cdot d(0, 2) \end{array}\right\} \; C[d(0,1) - d(0,2)] = C \cdot f \cdot d(0,2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = d(0,1) - d(0,2)/d(0,2) = {}^{*}d(0,1)/d(0,2) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = 1/d(0, 1, 2) - 1 = 1/[1 + i(0, 1, 2)]^{-1} - 1 = 1 + i(0, 1, 2) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = i(0, 1, 2)$$ *IL TASSO FRA E' UGUALE AL TASSO A TERMINE*

$^{*}d(0,1)/d(0,2) = 1/d(0, 1, 2)$ *relazione tassi a pronti e tasso a termine*

ESERCIZI PROPOSTI

- ***ESERCIZIO 1 [domanda multiple choice] (in neretto la risposta corretta)***

Testo
Consideriamo la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti* i(0, S). *Se* $t_1 < t_2$, *quale delle seguenti relazioni deve essere sempre verificata se non si vogliono consentire arbitraggi?

(a) $i(0, t_1) \geq i(0, t_2)$
(b) $i(0, t_1) \leq i(0, t_2)$
(c) $i(0, t_1) > i(0, t_2)$
(d) $i(0, t_1) < i(0, t_2)$
(e) nessuna delle precedenti

- ***ESERCIZIO 2***

Dato un mercato con i seguenti titoli:
- ***uno ZCB con scadenza residua 6 mesi e prezzo 98.7***
- ***uno ZCB con scadenza residua 12 mesi e prezzo 95.3***
- ***uno ZCB con scadenza residua 18 mesi e prezzo 94.1***
- ***uno ZCB con scadenza residua 24 mesi e prezzo 91.1***

Determinare sotto ipotesi di assenza di arbitraggio il prezzo dello ZCB emesso tra 6 mesi e durata un anno, valore nominale 100.

Svolgimento:

d(0, 6) = 0.987 d(0, 12) = 0.953 d(0, 18) = 0.941 d(0, 24) = 0.911

d(0, 6, 12) = d(0, 12)/ d(0, 6) = 0.953/0.987 = 0.966

P = d(0, 6, 12) · 100 = 0.966 · 100 = 96.6

- ***ESERCIZIO 3 [domanda multiple choice] (in neretto la risposta corretta)***

Supponiamo che il tasso a pronti a un anno sia maggiore del tasso a pronti a due anni, allora:

(a) Il tasso a termine tra uno e due anni è sempre compreso tra due tassi a pronti
(b) Il tasso a termine tra uno e due anni è sempre più grande dei due tassi a pronti
(c) Il tasso a termine tra uno e due anni è sempre più piccolo dei due tassi a pronti
(d) La relazione è impossibile in quanto creerebbe opportunità di arbitraggio

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto

ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

- ***ESERCIZIO 4 [domanda multiple choise] (in neretto la risposta corretta)***

Quale delle seguenti affermazioni sui tassi a pronti e a termine deve essere sempre verificata per evitare arbitraggi?

(a) I tassi a pronti sono sempre crescenti rispetto al tempo
(b) I tassi a termine sono sempre crescenti rispetto al tempo
(c) I tassi a pronti sono sempre maggiori dei tassi a breve (tassi a termine a un anno)
(d) I tassi a pronti sono sempre minori dei tassi a breve (tassi a termine a un anno)
(e) Nessuna delle precedenti

- ***ESERCIZIO 5***

Data la struttura dei fattori di sconto a pronti

$$d(0, 1) = 0.98;\ d(0, 2) = 0.97;\ d(0,3) = 0.96;\ d(0, 4) = 0.955;$$

calcolare il prezzo a termine F_1 con pagamento tra $T_1 = 2$ anni di uno zero coupon bond che rimborsa un capitale $C = 105$ tra $T_2 = 4$ anni.

(a) $F < 95$
(b) $95 \leq F < 100$
(c) $100 \leq F < 105$
(d) $105 \leq F < 110$
(e) $110 \leq F$

Svolgimento:

$$\mathbf{F = C \cdot d(0, T_2)/d(0, T_1) = 108.3}$$

- ***ESERCIZIO 6***

Con gli stessi dati dell'esercizio precedente. Si vuole rimborsare un debito $D = 900$ in 4 anni, in modo equo rispetto alla struttura dei tassi del mercato assegnata nell'esercizio precedente, con tre rate di importi R, $2R$, $3R$ pagate in $t = 1, 2, 3$ e un importo pari a $D/2$ da pagarsi in $t = 4$. Determinare R.

(a) R < 83
(b) $83 \leq R < 87$
(c) $87 \leq R < 92$
(d) $92 \leq R < 97$
(e) $97 < R$

Svolgimento:

Risolviamo rispetto a R:

$Rd(0, 1) + 2Rd(0, 2) + 3Rd(0, 3) + (D/2)d(0, 4) = D$ =>

=> $\mathbf{[R = D - (D/2)d(0, 4)]/[d(0, 1) + 2d(0, 2) + 3d(0, 3)] = 81.08}$

- ***ESERCIZIO 7***

La costruzione di un nuovo tratto autostradale ha un costo iniziale di 10 milioni di €. La società realizzatrice verrà pagata con i pedagi dei successivi 5 anni e stima che genereranno la seguente successioni di flussi di cassa (in milioni di €):

$$X = (4, 4, 4, 6, 6)|(1, 2, 3, 4, 5)$$

Utilizzando la struttura dei tassi a pronti assegnata, determinare
- ***La convenienza o meno dell'investimento in base al criterio del VAN***
- ***Il valore attuale in t = 3, secondo la dinamica basata sulle aspettative, dei pedaggi che verranno pagati in t = 4 e in t = 5.***

Soluzione:

Posto $d_k = d(0, k) = (i - s_k)^{-k}$,

$$V_0 = -10 + 4(d_1 + d_2 + d_3) + 6(d_4 + d_5)$$

L'investimento risulta conveniente se tale valore risulta positivo.
Si ha quindi

$$\mathbf{V_3 = (d_4/ d_3)6 + (d_5/ d_3)6}$$

- ***ESERCIZIO 8***

Supponiamo che il tasso a pronti a un anno sia maggiore del tasso a pronti a due anni, allora:

(a) Il tasso a termine tra uno e due anni è sempre compreso tra i due tassi a pronti.
(b) Il tasso a termine tra uno e due anni è sempre più grande dei due tassi a pronti.
(c) Il tasso a termine tra uno e due anni è sempre più piccolo dei due tassi a pronti.
(d) Il tasso a termine può essere compreso tra i due tassi a pronti oppure maggiore di entrambi, dipende dai casi.

Soluzione:
[Enunciare e dimostrare la relazione fondamentale tra tassi spot e tassi forward, indicando con

$s(t_1)$ il tasso spot con scadenza tra t_1 anni, con $s(t_2)$ il tasso spot con scadenza tra t_2 anni e con $f(t_1, t_2)$ il tasso forward tra t_1 e t_2, con $t_1 < t_2$]

In regime di capitalizzazione composta la relazione risulta essere:

$$[1 + f(t_1, t_2)]^{t_2 - t_1} = [1 + s(t_2)]^{t_2} / [1 + s(t_1)]^{t_1}$$

Supponiamo che al contrario valga $[1 + f(t_1, t_2)]^{t_2 - t_1} > [1 + s(t_2)]^{t_2} / [1 + s(t_1)]^{t_1}$, ovvero

$$[1 + s(t_1)]^{t_1} \cdot [1 + f(t_1, t_2)]^{t_2 - t_1} > [1 + s(t_2)]^{t_2}$$

Allora possiamo operare un arbitraggio nel modo seguente: a $t = 0$ prendiamo in prestito 1 € al tasso $s(t_2)$, impegnandoci perciò a restituirne $[1 + s(t_2)]^{t_2}$ al tempo t_2. Sempre a $t = 0$ investiamo, per un tempo pari a t_1, tale euro suun deposito che paga il tasso $s(t_1)$ e al contempo ci impegnamo per un deposito pari a $[1 + s(t_1)]^{t_1}$ euro al tasso $f(t_1, t_2)$ per il periodo $[t_1, t_2]$. Al tempo t_2 i soldi depositati avranno generato il capitale $[1 + s(t_1)]^{t_1} \cdot [1 + f(t_1, t_2)]^{t_2 - t_1}$ superiore all'importo del prestito da restituire.
Se vale disuguaglianza oppposta l'arbitraggio si prova con un analogo ragionamento.
Altrimenti, con un procedimento simile al precedente, si può dimostrare la medesima relazione utilizzando i fattori di sconto a pronti e a termine:

$$[1 + s(t_1)]^{t_1} \cdot [1 + f(t_1, t_2)]^{t_2 - t_1} > [1 + s(t_2)]^{t_2}$$

{ARBITRAGGIO: operazione che consiste nell'acquistare un bene o un'attività finanziaria su un mercato, investendolo su un altro mercato, sfruttando le differenze di prezzo al fine di ottenere un profitto.}

- ***ESERCIZIO 9***

Le quotazioni odierne degli zero coupon bond con scadenze 3 mesi, 9 mesi ed 1 anno sono rispettivamente $P_3 = 98$, $P_9 = 97$ e $P_{12} = 96.5$. inoltre, un'obbligazione con cedola trimestrale, TAN = 8% e scadenza tra 6 mesi ha un prezzo $Q = 98$. Determinare:

- ***I tassi a pronti (in percentuale e su base annua) s_3, s_9, s_{12} con scadenza tra 3, 6, 9 mesi.***
- ***Il valore attuale V_0 di un capitale $C = 1250$ disponibile tra 6 mesi.***
- ***Il tasso a termine (in percentuale e su base annua) $f_{3,6}$ tra 3 e 6 mesi.***

Svolgimento:

- I fattori di sconto a 3, 9 e 12 mesi sono $d(0, 3) = P_3/100$, $d(0, 9) = P_9/100$, $d(0, 12) = P_{12}/100$

Inoltre:

$$Q = 2\ d(0, 3) + 102\ d(0, 6)$$

Da cui si trova:

$$d(0, 6) = [Q - 2\ d(0, 3)]/102$$

I tassi a pronti sono:

$s_3 = d(0, 3)^{-12/3} – 1$, $s_6 = d(0, 6)^{-12/6} – 1$, $s_9 = d(0, 9)^{-12/9} – 1$

- **$V_0 = C \cdot d(0, 6)$**

- $d(0, 3, 6) = d(0, 6)/ d(0, 3)$

$f_{3,6} = d(0, 3, 6)^{-12/3} – 1$

- ***ESERCIZIO 10***

Mostrare come effettuare un arbitraggio se

$$d(0, 5, 10) > d(0, 10)/ d(0, 5)$$

Si può realizzare un arbitraggio nel seguente modo:

- **Acquisto a pronti 1 zcb che scade in 10**
- **Vendo a pronti d(0, 5, 10) zcb che scadono in 5**
- **Vendo a termine, con consegna in 5, 1 zcb che scade in 10**

In questo modo si ha un introito positivo pari a d(0, 5, 10)d(0, 5) - d(0, 10) e nulla nelle date future.

- ***ESERCIZIO 11 [domanda multiple choice] (in neretto la risposta corretta)***

Per calcolare i fattori di sconto a termine d si considera il sistema lineare Ad = P, dove A è la matrice dei cashflow e P il vettore dei prezzi d mercato. In quale dei seguenti casi non è possibile determinare d?

(a) Il rango di A è maggiore del rango di [A|P]
(b) Il rango di A è uguale al rango di [A|P]
(c) Il rango di A è minore del rango di [A|P]

Il rango di A è sempre maggiore o uguale del rango di [A|P]. nel caso in cui i ranghi siano uguali è possibile determinare d, altrimenti non è possibile

- ***ESERCIZIO 12 [domanda multiple choice] (in neretto la risposta corretta)***

In un contratto a termine su zero coupon bond abbiamo indicato il prezzo a termine con d(0, t, s), con 0 < t < s. Quale delle seguenti proprietà di d(0, t, s) è vera?

(a) d(0, t, s) è sempre uguale a 0
(b) d(0, t, s) è stabilito in t, ma pagato in s
(c) d(0, t, s) è stabilito in 0, ma pagato in t

- ***ESERCIZIO 13***

Il flusso x = (200, 500)|(2, 5) ha valore attuale V_x = 650 e lo zero coupon bond che scade tra 5 anni ha valore attuale V_y = 91. Calcolare i fattori di sconto a 2 e a 5 anni.
Secondo l'ipotesi della dinamica basata sulle aspettative di mercato, quale sarà il prezzo tra due anni del titolo che rimborsa 1000€ tra 5 anni?

Svolgimento:

I fattori di sconto d(0, 2), d(0, 5) si trovano risolvendo:

$$\mathbf{200\ d(0,2) + 500\ d(0,5) = V_x \qquad e \qquad 100\ d(0,5) = V_y}$$

Secondo l'ipotesi della dinamica basata sulle aspettative di mercato il valore atteso futuro coincide con l'attuale prezzo a termine, quindi

$$\mathbf{100\ d(0,2,5) = 100\ d(0,5)/d(0,2)}$$

- ***ESERCIZIO 14***

I prezzi a pronti degli zero coupon bond unitari che scadono rispettivamente tra 5 e tra 10 anni sono P_1 = 0.95 e P_2 = 0.93. Il prezzo a termine, con consegna tra 5 anni, dello zero coupon bond che scade tra 10 anni è P_3 = 0.97. Mostrare come effettuare un arbitraggio in modo da ricavare con certezza 1500 € all'istante iniziale senza nessun esborso successivo, indicando quante quote degli zcb vanno acquistate/vendute a pronti/termine nei diversi istanti di tempo.

Svolgimento:

Sia $x = d(0,5,10)d(0,5) - d(0,10) = P_3 \cdot P_1 - P_2$

Dato che $x < 0$ si può realizzare un arbitraggio.

Sia $C = 1500/x$. La strategia per ottenere 1500 è:

1. **Acquisto a pronti C zcb che scadono in 10**
2. **Vendo a pronti C-P_3 zcb che scadono in 5**
3. **Vendo a termine C zcb che scadono in 10**

0	*5*	*10*
$-CP_2$	**0**	**C**
$+CP_3P_1$	**$-CP_3$**	**0**
0	**$+CP_3$**	**-C**
$C(P_3P_1 - P_2)$ = 1500	**0**	**0**

- ***ESERCIOZIO 15***

Dati i tassi a pronti a 1 anno r(0, 1) e il tasso a termine tra 1 e 3 anni r(0, 1, 3) = 12%, calcolare i corrispondenti fattori di sconto. Quanto deve essere il tasso a pronti a 3 anni perché non sia possibile effettuare arbitraggi?

Svolgimento:

$$\mathbf{d(0, 1) = (1 + r(0, 1))^{-1} = 0.91}$$
$$\mathbf{d(0, 1, 3) = (1 + r(0, 1, 3))^{-2} = 0.8}$$

inoltre:

$$\mathbf{d(0, 3) = d(0, 1, 3) \cdot d(0, 1) = 0.72}$$

e

$$\mathbf{r(0, 3) = d(0, 3)^{-1/3} - 1 = 11{,}33\%}$$

– 4. FLUSSI DI CASSA ALEATORI *[CAP VI del libro "FINANZA E INVESTIMENTI" autore D.G. LUENBERGER]*

4.1 LA TEORIA DEL PORTAFOGLIO NELL'APPROCCIO MEDIA-VARIANZA

Quando si effettua un investimento, tipicamente l'esborso iniziale di capitale è noto, mentre vi è incertezza nella somma che verrà ricevuta. Ci concentreremo su investimenti effettuati in un singolo periodo. Tale assunzione, cioè che l'investimento preveda un unico periodo, costituisce una buona approssimazione, anche se molti investimenti comuni, come ad esempio quelli in azioni quotate, non sono legati ad un unico periodo prefissato, dal momento che possono essere liquidati in qualsiasi momento e possono fruttare dividendi periodici.
Gestiremo l'incertezza attraverso il *metodo matematico della media varianza* che utilizza solo in misura limitata la teoria della probabilità e conduce ad utili espressioni e procedure matematiche.

4.2 RENDIMENTO DI UN TITOLO RISCHIOSO

Gli strumenti di investimento che possono essere acquistati e venduti, vengono spesso chiamati titoli.
Supponiamo di acquistare un titolo al tempo 0 e di venderlo un anno dopo.
Il *rendimento totale* dell'investimento è definito come il rapporto tra il rendimento ricevuto e l'importo investito:

RENDIMENTO TOTALE = R = *Importo ricevuto / importo investito*

ed indicando con X_0 l'importo investito e con X_1 l'importo ricevuto, il rendimento totale può essere riscritto come

$$R = X_1 / X_0$$

Il *tasso di rendimento* è invece definito dal rapporto:

TASSO DI RENDIMENTO = r = (Importo ricevuto – Importo investito) / Importo investito =

$$= (X_1 - X_0) / X_0$$

E' facile notare la relazione che lega R ad r: se, infatti, $R = X_1 / X_0$ allora $r = (X_1 - X_0) / X_0 =$

$= X_1 / X_0 - 1 = R - 1 \;\; \Rightarrow \;\; r = R - 1$

oppure, indifferentemente, $R = r + 1$ che può essere riscritta come $X_1 / X_0 = r + 1 \;\; \Rightarrow$

$$\Rightarrow \;\; X_1 = (1 + r)\, X_0$$

costatando così come *il tasso di rendimento si comporti in modo analogo ad un tasso di interesse.*

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

4.3 VENDITA ALLO SCOPERTO

La procedura di *vendita allo scoperto* o *shorting* è la possibilità di vendere un titolo che non si possiede, prendendolo in prestito da qualcuno che lo possiede e rivendendolo ad un altro soggetto, ricevendo così l'importo X_0. Successivamente si restituisce il prestito acquistando il titolo al prezzo X_1 e rendendolo a chi lo aveva prestato.
Si possono configurarw due possibili scenari:

- *l'importo X_1 è inferiore all'importo X_0 iniziale* => è stato realizzato un profitto pari ad $X_0 - X_1$ e la vendita allo scoperto è stata quindi redditizia perché il prezzo del titolo è diminuito

- *l'importo X_1 è superiore all'importo X_0 iniziale* => si presenta una perdita pari ad $X_1 - X_0$

Dato che X_1 può aumentare arbitrariamente, la procedura della vendita allo scoperto è considerata piuttosto rischiosa o pericolosa, perché la possibile perdita è *illimitata.*
Lo svolgimento della procedura della vendita allo scoperto replica sostanzialmente la funzione della società emittente.
Il *rendimento* associato alla vendita allo scoperto può essere così determinato: si riceve X_0 all'inizio e si paga X_1 in seguito, quindi la spesa è $- X_0$ e l'entrata finale è $- X_1$. Il rendimento totale è quindi

$$R = - X_1 / - X_0 = X_1 / X_0$$

Segue che, annullandosi i segni negativi, la formula del rendimento totale si applica algebricamente sia all'acquisto e sia alla vendita allo scoperto, potendo esprimere questa conclusione come:

$$- X_1 = - X_0 R = - X_0(1 + r)$$

evidenziando come l'introito finale sia legato alla spesa iniziale.
La vendita allo scoperto converte un tasso di rendimento negativo in un profitto, poiché l'investimento iniziale è negativo.

Es. Vendiamo allo scoperto 100 azioni che in questo momento sono vendute sul mercato a 10€, quindi riceviamo dalla vendita 1000€. Dopo un anno il prezzo delle azioni è sceso a 9€, quindi ne acquistiamo 100 da restituire all'intermediario effettuando una spesa di 900€.
Poiché il prezzo è diminuito, la transazione è stata vantaggiosa ed abbiamo realizzato un profitto di 100€

$$R = 900/1000 = 0.9 \quad \text{e} \quad r = (900 - 1000)/1000 = - 0.1 = - 10\%$$

notando come $r = - 10\%$ sia negativo, dall'azione di vendita allo scoperto ne consegue un profitto pari a $- X_0(r) = - 1000€(- 0.1) = 100€$

4.4 RENDIMENTO DEL PORTAFOGLIO

Sappiamo che, in generale, se investo C € in un titolo il cui rendimento è R^i, dopo un anno ottendo $C \cdot R^i$ *(C* può anche essere negativo e realizzo un gadagno se R è minore di *1).*

Il valore della singola azione sarà pari a C/V_0^i ed il prezzo in 1 sarà V_1^i e quindi il *valore totale della mia posizione in 1* sarà: $C/V_0^i \cdot V_1^i = C\,R^i = C(1 + r^i)$

Considerando un portafoglio:
Dato un capitale iniziale X_0 lo investo su n titoli e cioè lo ripartisco sugli n titoli disponibili. Quindi

$\sum_{i=1}^{n} X_{0i} = X_0$ dove X_{0i} rappresenta l'importo investito nel titolo i.

Indichiamo con ω_i la percentuale investita sui singoli titoli $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n,$ ossia il *peso o frazione* del titolo i all'interno del portafoglio. Si avrà che

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1\ .$$

I valori di ω_i possono essere anche negativi se è annessa la vendita allo scoperto, infatti:

- $\omega_i < 0$ *sto effettuando vendita allo scoperto sul titolo* i
- $\omega_i > 0$ *sto acquistando il titolo* i

In $t = 0$ ho $V_0 = X_0,$ cioè il valore iniziale del portafoglio è esattamente uguale al capitale iniziale investito.
Il valore X_1 sarà *il valore finale del portafoglio* e sarà uguale a quanto investito nel 1° titolo per il rispettivo rendimento più lo stesso per il secondo e così via, ottenendo:

$$X_1 = \omega_1 \cdot X_0 \cdot R_1 + \omega_2 \cdot X_0 \cdot R_2 + \ldots + \omega_n \cdot X_0 \cdot R_n$$

Potendo così ottenere il *rendimento del portafoglio,* raccogliendo a destra X_0 e dividendo per questa quantità X_1 e cioè:

$$X_1/X_0 = \omega_1 \cdot R_1 + \omega_2 \cdot R_2 + \ldots + \omega_n \cdot R_n$$

Notiamo quindi che *per ottenere il rendimento di un portafoglio basta fare la media pesata dei rendimenti dei singoli titoli.*
Supponiamo ad esempio che $R_1 = 1.1$ => il titolo 1 ha reso il $10\%,$ che $R_2 = 0.9$ =>
=> il titolo 2 ha perso il 10% e supponiamo anche che abbia investito il 60% del capitale iniziale sul titolo 1 e cioè $\omega_1 = 60\%$ ed il 40% nel titolo $2,$ quindi $\omega_2 = 40\%.$ Avremo che

$$\textit{Rendimento Portafoglio} = \omega_1 \cdot R_1 + \omega_2 \cdot R_2 = 0.6 \cdot 1.1 + 0.4 \cdot 0.9 = 1.02$$

Tale relazione si mantiene anche in considerazione dei *tassi di rendimento.* Infatti:

$$r = R - 1 = \sum_{i=1}^{n} \omega_1 R_1 - 1 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i - \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (R_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i$$

Enunciamo quindi questo risultato:

- il *Rendimento totale* ed il *Tasso di rendimento* di un portafoglio di titoli sono uguali alla somma pesata dei rendimenti dei singoli titoli, nella quale il peso di ciascun titolo è dato dal suo peso relativo (in termini di costo di acquisto) nel portafoglio e cioè:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i \ ; \qquad r = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i$$

4.5 VARIABILI ALEATORIE

La quantità di denaro che si riceverà dalla futura vendita di un titolo è incerta al momento dell'acquisto; in questi casi il *rendimento è aleatorio* e può essere descritto in termini probabilistici. Cercheremo ora di determinare *media e varianza di un tasso di rendimento.*
Abbiamo a disposizione $r_1, r_2, \dots, r_n,$ cioè i tassi di rendimento dei singoli titoli.
Allora per il *valore atteso* si avrà:

$$Er_1 = \bar{r}_1 , \quad Er_2 = \bar{r}_2 , \quad \dots , \quad Er_n = \bar{r}_n$$

Per la varianza (quanto il rendimento può discostarsi dal suo valore atteso) abbiamo invece:

$$Var(r_1) = \sigma_{11} , \ Var(r_2) = \sigma_{22} , \dots , Var(r_k) = \sigma_{kk}$$

Inoltre, dalla definizione di $Var(x) = E(x - \bar{x})^2$ si ha:

$$Var(r_1) = \sigma_{11} = E(r_1 - \bar{r}_1)^2 = E(r_1^2 – 2r_1 \bar{r}_1 + \bar{r}_1^2) = E(r_1^2) – 2 \ _1 E(r_1) + \bar{r}_1^2 =$$

$$= E(r_1^2) + \bar{r}_1^2$$

E' utile inoltre andare ad identificare la *covarianza* (ci informa circa la dipendenza tra 2 variabili aleatorie, cioè se la conoscenza del valore di una fornisce informazioni sul valore dell'altra):

$$cov(r_1, r_2) = E(r_1 - \bar{r}_1)(r_2 - \bar{r}_2) = \sigma_{1,2}$$

A partire dalla definizione stessa di covarianza è possibile ricavare un ulteriore metodo di calcolo:

$$cov(r_1, r_2) = E(r_1 - \bar{r}_1)(r_2 - \bar{r}_2) = E(r_1 - r_2) - \bar{r}_2 E(r_1) - \bar{r}_1 E(r_2) + E(\bar{r}_1 r_2) =$$
$$= E(r_1 - r_2) - \bar{r}_1 r_2 - \bar{r}_1 \bar{r}_2 + \bar{r}_1 \bar{r}_2 = E(r_1 - r_2) - \bar{r}_1 r_2$$

$$\sigma_{12} = E(r_1 - r_2) - \bar{r}_1 \bar{r}_2 \ \Rightarrow \ NB: \sigma_{12} = \sigma_{21}$$

Dato che il valore massimo assumibile dalla covarianza è dato dal prodotto delle deviazioni standard (radice quadrata della varianza) delle singole variabili aleatorie, allora dividendo il valore della covarianza per il suo valore massimo otteniamo il *coefficiente di correlazione:*

$$\rho_{12} = \sigma_{12} / \sqrt{(\sigma_{11} \sigma_{22})} \quad \text{con} \quad -1 \leq \rho_{12} \leq 1$$

(-1 massima correlazione negativa, 1 massima correlazione positiva, $\rho_{12} = 0$ correlazione assente)

Oltre alla definizione di media, varianza, covarianza ed indice di correlazione, è utile andare ad esaminare la *varianza di una somma di variabili aleatorie:*

$$Var(x + y) = E(x + y - \bar{x} - \bar{y})^2 = E(x - \bar{x} + y - \bar{y})^2 = E[(x - \bar{x})^2 + 2(x - \bar{x})(y - \bar{y}) + (y - \bar{y})^2]$$
$$= \sigma_{xx} + 2\,\sigma_{xy} + \sigma_{yy}$$

4.6 MATRICE VARIANZA – COVARIANZA

Il calcolo della varianza di una somma di variabili aleatorie o, più in generale, di una combinazione lineare di variabili aleatorie può risultare un procedimento difficoltoso. Si definisce allora un processo semplificativo che è basato sull'utilizzo della *matrice varianza-covarianza.*
Data una n-pla di v.a. (che per noi saranno titoli identificati da un rendimento atteso e da una varianza) costruiamo nel seguente modo Σ, *matrice varianza-covarianza*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sigma_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sigma_{ii} & \sigma_{ij} & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \sigma_{jj} & \ldots\ldots\ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Questa è la matrice nxn simmetrica poichè $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ed è *definita positiva*, cioè il $DET>0$ ed i determinanti principali sono >0

In generale una matrice è definita positiva se $\underline{v}^T\,\Sigma\,\underline{v} > 0 \quad \forall\ \underline{v} \in \mathbb{R}^n$
Possiamo ora andare a vedere come attraverso l'utilizzo della matrice varianza-covarianza sia possibile giungere al medesimo risultato per la somma di variabili aleatorie: date le v.a. x e y allora avremo che la matrice varianza-covarianza sarà:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

dato che si vuole calcolare la varianza della combinazione lineare $x + y$ (con pesi 1 e 1) allora avremo che

dalla formula generale $\underline{v}^T\,\Sigma\,\underline{v}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} + \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} + \sigma_{yy} \end{pmatrix} =$$
$$= \sigma_{xx} + \sigma_{xy} + \sigma_{yx} + \sigma_{yy} = \sigma_{xx} + 2\sigma_{xy} + \sigma_{yy}$$

Più in generale il calcolo della varianza di una generica combinazione lineare $\alpha x + \beta y$ sarà calcolato dal prodotto

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\sigma_{xx} + \beta\sigma_{xy} \\ \alpha\sigma_{yx} + \beta\sigma_{yy} \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha^2\sigma_{xx} + \alpha\beta\sigma_{xy} + \alpha\beta\sigma_{yx} + \beta^2\alpha\sigma_{yy} = \alpha^2\sigma_{xx} + 2\alpha\beta\sigma_{yx} + \beta^2\alpha\sigma_{yy}$$

Sarà analogo inoltre il calcolo della varianza di una somma di 3 v.a. $[Var(x + y + z)]$ che si otterrà sempre con l'utilizzo di $\underline{v}^T\, \Sigma\, \underline{v}$ e cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} + \sigma_{xy} + \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} + \sigma_{yy} + \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} + \sigma_{zy} + \sigma_{zz} \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma_{xx} + \sigma_{xy} + \sigma_{xz} + \sigma_{yx} + \sigma_{yy} + \sigma_{yz} + \sigma_{zx} + \sigma_{zy} + \sigma_{zz} = \sigma_{xx} + 2\sigma_{xy} + 2\sigma_{xz} + 2\sigma_{yz} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

4.7 MEDIA E VARIANZA DI UN PORTAFOGLIO

Definiti i concetti di media e varianza dei rendimenti dei singoli titoli, oltre alla covarianza tra coppie di titoli, andiamo ad esaminare come sia possibile utilizzarli per determinare la *media e la varianza del rendimento di un portafoglio.*

REDIMENTO MEDIO DI UN PORTAFOGLIO

Supponiamo che siano disopnibili n titoli aventi tassi di rendimento (aleatori) $r_1, r_2, \ldots, r_n$.
I rispettivi valori attesi sono $Er_1 = \bar{r}_1, \quad Er_2 = \bar{r}_2, \quad \ldots, \quad Er_n = \bar{r}_n$.
Supponiamo ora di comporre un portafoglio di questi n titoli utilizzando i pesi ω_i con $i = 1, 2, \ldots, n$.
Il tasso di rendimento del portafoglio, espresso in termini di rendimento dei singoli titoli, è

$$r = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \ldots + \omega_n r_n = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i$$

Sfruttando la linearità del valore atteso otteniamo:

$$E(r) = \omega_1 E(r_1) + \omega_2 E(r_2) + \ldots + \omega_n E(r_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i E(r_i) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \bar{r}_i$$

Quindi il tasso di rendimento intern del portafoglio si determina calcolando la somma ponderata dei singoli tassi di rendimento attesi.

VARIANZA DEL RENDIMENTO DEL PORTAFOGLIO

Determiniamo ora la varianza del tasso di rendimento del portafoglio denotando con σ_i^2 *la varianza del rendimento del titolo* i e con σ_{ij} *la varianza dei rendimenti dei titoli* i *e* j.
Partiamo dalla definizione di *varianza del tasso di rendimento di un portafoglio:*

$$Var(r) = \sigma^2 = E(r - \bar{r})^2 = E[\sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i - \sum_{i=1}^{n} \omega_i \bar{r}_i]^2 = E[\sum_{i=1}^{n} \omega_i (r_i - \bar{r}_i)]^2 =$$

$$E[\sum_{i=1}^{n} \omega_i (r_i - \bar{r}_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} \omega_j (r_j - \bar{r}_j) = [\sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \, \omega_j (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)] = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \, \omega_j \, \sigma_{ij} = \underline{\omega}^T \, \Sigma \, \underline{\omega}$$

Quindi la varianza del rendimento di un portafoglio può essere ricavata dalle covarianze delle coppie di rendimenti dei titoli e dei pesi dei titoli all'interno del portafoglio.

$$\sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \, \omega_j \, \sigma_{ij} = \omega_1 \, \omega_1 \, \sigma_{11} + \omega_1 \, \omega_2 \, \sigma_{12} + \omega_2 \, \omega_1 \, \sigma_{21} + \omega_2 \, \omega_2 \, \sigma_{22} =$$

$$= \omega_1^2 \, \sigma_1^2 + 2 \, \omega_1 \, \omega_2 \, \sigma_{12} + \omega_2^2 \, \sigma_2^2$$

Notiamo come lo stesso risultato possa essere ottenuto tramite $\underline{\omega}^T \, \Sigma \, \underline{\omega}$:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \, \sigma_{11} + \omega_2 \, \sigma_{12} \\ \omega_1 \, \sigma_{21} + \omega_2 \, \sigma_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\omega_1^2 \, \sigma_{11} + \omega_1 \, \omega_2 \, \sigma_{12} + \omega_1 \, \omega_2 \, \sigma_{12} + \omega_2^2 \, \sigma_{22} = \omega_1^2 \, \sigma_1^2 + 2 \, \omega_1 \, \omega_2 \, \sigma_{12} + \omega_2^2 \, \sigma_2^2$$

ESEMPIO 1

$\bar{r}_1 = 0.12 = 12\%$ $\quad \sigma_1 = 0.20$ $\quad \sigma_{12} = 0.01$ $\quad \omega_1 = 0.25$
$\bar{r}_2 = 0.15 = 15\%$ $\quad \sigma_2 = 0.18$ $\quad \omega_2 = 0.75$

- *Media del portafoglio*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \bar{r}_i = 025(0.12) + 0.75(0.15) = 0.1425 = 14.25\%$$

- *Varianza del portafoglio*

[metodo 1]

$$\sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \, \omega_j \, \sigma_{ij} = \omega_1^2 \, \sigma_1^2 + 2 \, \omega_1 \, \omega_2 \, \sigma_{12} + \omega_2^2 \, \sigma_2^2 = (0.25^2 \cdot 0.2^2) + 2(0.25 \cdot 0.75 \cdot 0.1) +$$

$$+ (0.75^2 \cdot 0.18^2) = 0.024475 = \sigma^2 \Rightarrow$$

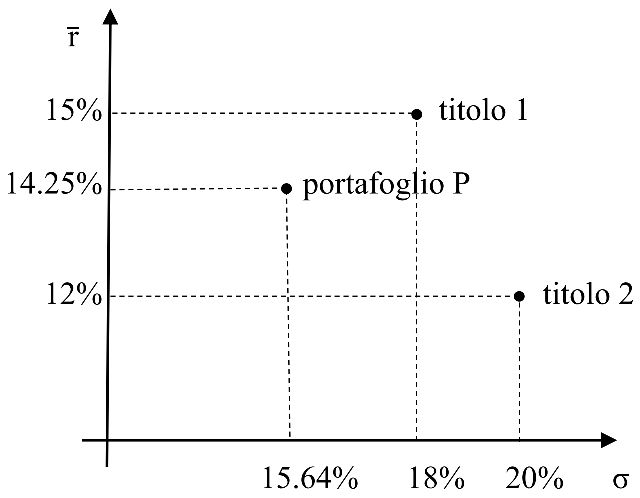
$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 0.1564$$

[metodo 2]

$$\sigma^2 = \underline{\omega}^T \, \Sigma \, \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \omega_1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \omega_1^2 \, \sigma_1^2 + 2 \, \omega_1 \, \omega_2 \, \sigma_{12} + \omega_2^2 \, \sigma_2^2 =$$

$$= \sigma^2 = 0.024475$$

Possiamo inoltre rappresentare tale situazione su un diagramma media-deviazione standard:



E' possibile notare come principalmente il titolo 2 sia meno interessante rispetto al titolo 1 poiché rappresenta un rendimento atteso inferiore ed un maggior margine di variazione del rendimento atteso stesso.
Notiamo inoltre come da una combinazione lineare dei due titoli con pesi ω_1 e ω_2 sia possibile giungere ad un portafoglio che presenta un rendimento atteso compreso tra una deviazione standard inferiore rispetto alle singole σ_1 e σ_2.

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

4.8 DIVERSIFICAZIONE

I portafogli composti da pochi titoli possono essere soggetti ad un alto livello di rischio rappresentato da una *varianza relativamente alta.* Generalmente *la varianza del rendimento di un portafoglio può essere ridottainserendo nel portafoglio altri titoli, cioè attraverso l'operazione di diversificazione.*
Supponiamo ad esempio che siano disponibili molti titoli, tutti tra loro incorrelati, ovvero che il rendimento di ciascun titolo non sia correlato con quello di alcun altro titolo del gruppo; supponiamo inoltre che il *tasso di rendimento* di ognuno di questi titolo abbiamo media m e varianza σ^2.
Costruiamo a partire da questi un portafoglio con quantità uguali di n di ciascun titolo e cioè

$\omega_i = 1/n \quad \forall\ i = 1,2, \ldots, n$ avremo che:

Tasso di rendimento complessivo del portafoglio
$$= r = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i = \sum_{i=1}^{n} 1/n \cdot r_i = 1/n \sum_{i=1}^{n} r_i \quad =>$$

=> *Valore atteso tasso di Rendimento*
$$= \bar{r} = E(r) = 1/n \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i = 1/n \cdot n \cdot m = m(\text{valore atteso indipendente da } n)$$

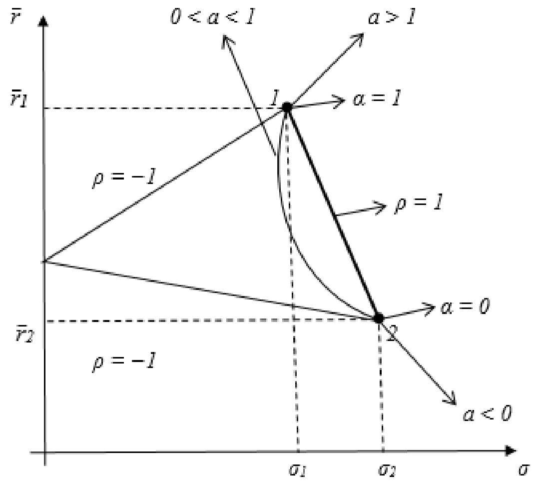
Varianza del tasso di rendimento
$$= 1/n \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \sigma^2/n$$

Sono v.a. incorrelate, quindi tutte le covarianze saranno nelle e la formula di calcolo della varianza $\sum_{i,j=1}^{n} \omega_i\, \omega_j\, \sigma_{ij}$ *risulterà non nulla solo nei casi* $i = j$.

Notiamo come per questo caso particolare la *varianza decresca rapidamente al cresere di* n.
Differente è invece il caso in cui i rendimenti dei titoli disponibili siano *correlati* poiché sarà necessario *sacrificare in modo consistente il rendimento atteso a fronte di una piccola diminuizione della varianza, sviluppato da Markowitz,* che esplicita i rapporti tra media e varianza.
Traiamo in questa sede una prima considerazione:

- *se i tassi di rendimento non sono correlati* attraverso la diversificazione è possibile *ridurre la varianza del portafoglio sostanzialmente a 0 utilizzando un alto numero di titoli*
- *Se i tassi di rendimento sono correlati positivamente è più difficile ridurre la varianza e il valore* di tale varianza potrebbe essere *limitato inferiormente*

4.9 DIAGRAMMA DI UN PORTAFOGLIO



Supponiamo che due titoli vengano rappresentati in un diagramma media-deviazione standard attraverso le rispettive informazioni: $\bar{r}_1$, σ_1 ed $\bar{r}_2$, σ_2.
Questi due titoli possono essere combinati con determinati pezzi per comporre un portafoglio, ovvero un nuovo titolo.
Il *valor medio e la deviazione standard* del nuovo titolo (portafoglio) possono essere calcolati sulla base della media, varianza e covarianze dei rendimenti dei titoli originali.
Dato che le covarianze non sono rappresentate nel diagramma, l'esatta posizione del punto che rappresenta il nuovo titolo (portafoglio) non può essere ricavata dalla posizione nel diagramma dei due titoli originali. *Esistono infatti una molteplicità di possibili posizioni del nuovo titolo dipendenti appunto dalla covarianza dei rendimenti dei titoli*.
Analizziamo le differenti possibilità:
A partire dai due titoli (1 e 2) definiamo un'intera famiglia di portafogli introducendo la variabile α con la quale si definiscono i pesi $\omega_i = \alpha$ e $\omega_2 = 1 - \alpha$ e cioè investo una quota α nel titolo 1 ed una quota $1 - \alpha$ nel titolo 2.
Al variare di α tra 0 e 1 si avrà un portafoglio contenente sotto il titolo 1 se $\alpha = 1$, una miscela dei due titoli se $0 < \alpha < 1$ e solo il titolo 2 se $\alpha = 0$.

NB: Valore di α esterni all'intervallo $0 < \alpha < 1$ rendono negativo l'uno e l'altro pezzo implicando così la vendita allo scoperto.

Al variare di α i nuovi portafogli possibili formano una curva che include i titoli 1 e 2, ma la cui forma esatta dipende da σ_{12}. La parte contenuta della curva corrisponde a combinazioni positive dei due titoli $[\omega_1, \omega_2 > 0]$, mentre la parte tratteggiata corrisponde alla vendita allo scoperto di uno dei due titoli.
Si può dimostrare che *la porzione continua della curva deve giacere all'interno della regione triangolare definita dai vertici 1 e 2 e dal punto A sull'asse verticale:*

– *Tasso di rendimento e rendimento atteso*
  Il tasso di rendimento del portafoglio definito da α è $r = \sum^{2} \omega_i r_i = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 =$

$= \alpha\, r_1 + (1-\alpha)\, r_2$ $\quad i=1$

Il valore atteso di questo tasso di rendimento è, per linearità del valore atteso:
$E(r) = E[\alpha\, r_1 + (1-\alpha)\, r_2] = \alpha\, \bar{r}_1 + (1-\alpha)\, \bar{r}_2$
che esprime il fatto che *il valore medio è compreso tra le medie originali ed è direttamente proporzionale alla quantità dei titoli,* quindi (per $0 < \alpha < 1$) il valore atteso del nuovo titolo sarà contenuto tra le medie originali. I valori estremi che questo può assumere sono così identificabili:
$\alpha = 1$ => *portafoglio composto dal solo titolo 1* => $\bar{r} = \bar{r}_1$
$\alpha = 0$ => *portafoglio composto dal solo titolo 2* => $\bar{r} = \bar{r}_2$

– *Varianza e deviazione standard*
Calcoliamo la varianza del tasso di rendimento del portafoglio:

$$\sigma^2 = Var(r) = \sum_{i,j=1}^{2} \omega_i\, \omega_j\, \sigma_{ij} = \omega_1^2\, \sigma_1^2 + 2\, \omega_1\, \omega_2\, \sigma_{12} + \omega_2^2\, \sigma_2^2 =$$

$$= \alpha^2\, \sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\, \sigma_{12} + (1-\alpha)^2\, \sigma_2^2$$

Data la definizione di $\rho = \sigma_{12} / \sigma_1\, \sigma_2$ *allora* $\sigma_{12} = \rho\, \sigma_1\, \sigma_2$ potendo così riscrivere la varianza come:
$\sigma^2 = Var(r) = \alpha^2\, \sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\, \rho\, \sigma_1\, \sigma_2 + (1-\alpha)^2\, \sigma_2^2$

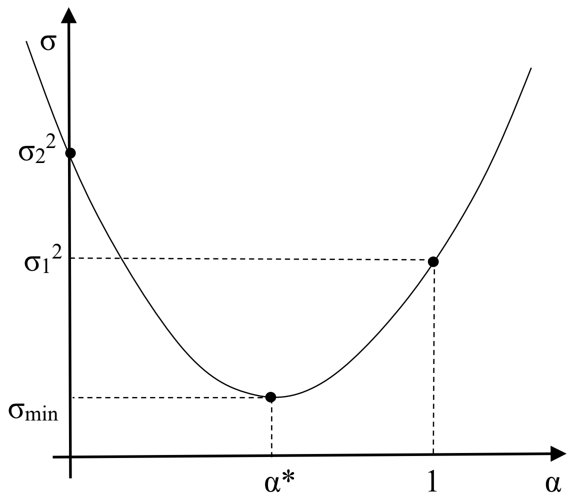
Sappiamo che $-1 \le \rho \le 1$, quindi per $\rho = 1$ troviamo il *limite superiore:*
$\rho = 1$ => $\sigma^2 = Var(r) = \alpha^2\, \sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\, \sigma_1\, \sigma_2 + (1-\alpha)^2\, \sigma_2^2 =$
$= [\alpha\, \sigma_1 + (1-\alpha)\, \sigma_2]^2$
E la corrispondente deviazione standard $\sigma = \alpha\, \sigma_1 + (1-\alpha)\, \sigma_2 \longrightarrow$ *espressione lineare in α*
Questo implica che al variare di α il portafoglio si muove lungo una retta tra 1 e 2.

Per $\rho = -1$ troviamo invece il *limite inferiore:*
$\rho = -1$ => $\sigma^2 = Var(r) = \alpha^2\, \sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\, \sigma_1\, \sigma_2 + (1-\alpha)^2\, \sigma_2^2 =$
$= [\alpha\, \sigma_1 - (1-\alpha)\, \sigma_2]^2$
Quindi la corrispondente deviazione standard $\sigma = |\, \alpha\, \sigma_1 - (1-\alpha)\, \sigma_2\, |$ che può anche essere considerata come espressione lineare in α e, per valori di α molto piccoli (prossimi allo zero), è inclinata negativamente fino ad intersecare l'asse delle ordinate, poi cambia segno e diviene inclinata positivamente fino a giungere in 1.
Concludiamo quindi che *la curva costituita dai punti corrispondenti ai portafogli deve giacere all'interno della regione sopra costruita.*

4.10 CALCOLO DEL VALORE DI *α* CHE MINIMIZZA LA VARIANZA DEL TASSO DI RENDIMENTO DEL PORTAFOGLIO

Data la varianza in funzione di α di un portafoglio composto da una combinazione lineare dei titoli 1 e 2, e cioè $\sigma^2 = Var(r) = \alpha^2\, \sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\, \sigma_{12} + (1-\alpha)^2\, \sigma_2^2$, che può anche essere riscritta in funzione di α:
$\sigma^2 = Var(r) = \alpha^2(\sigma_1^2 - 2\, \sigma_{12} + \sigma_2^2) + 2\, \alpha(\sigma_{12} - \sigma_2^2) + \sigma_2^2$, e cioè una *parabola* rispetto ad α

concava verso l'alto perché il coefficiente di α^2, $\sigma_1^2 - 2\,\sigma_{12} + \sigma_2^2 = Var(r_1, r_2)$ *è sempre positivo.*
E' possibile disegnare la parabola imponendo: $\alpha = 0 \Rightarrow \sigma_2^2$; $\alpha = 1 \Rightarrow \sigma_1^2$



Il minimo della funzione assunto in corrispondenza di α^* corrisponderà al minimo della deviazione standard e quindi della varianza del tasso di rendimento del portafoglio.
Per il calcolo esplicito di α^* possiamo così procedere:

$$d\, Var(r) / d\,\alpha = 2\alpha(\sigma_1^2 - 2\,\sigma_{12} + \sigma_2^2) + 2(\sigma_{12} - \sigma_2^2) = 0 \Rightarrow \alpha^* =$$
$$= \sigma_2^2 - \sigma_{12} / \sigma_1^2 - 2\,\sigma_{12} + \sigma_2^2$$

Oppure, analogamente, essendo una parabola, il suo punto di minimo corrisponderà a $-b/2a$ e quindi:

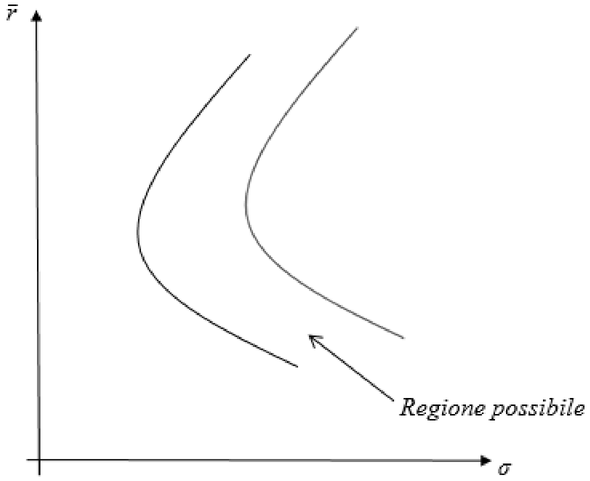
$$\alpha^* = -2(\sigma_{12} - \sigma_2^2)\ /\ 2(\sigma_1^2 - 2\,\sigma_{12} + \sigma_2^2) = \sigma_2^2 - \sigma_{12} / \sigma_1^2 - 2\,\sigma_{12} + \sigma_2^2$$

Notiamo come se $\sigma_2^2 > \sigma_{12} \Rightarrow 0 < \alpha^* < 1$ ed acquistiamo quote positive di entrambi i titoli.
Può però anche accadere che $\alpha^* < 0$ oppure che $\alpha^* > 1$ che sta ad indicare che il portafoglio e

4.11 INSIEME POSSIBILE

Se invece di 2, sono disponibili n titoli base, Possiamo rappresentarli come punti nel diagramma media-deviazione standard e immaginiamo poi comporre dei portafogli costituiti da questi n titoli utilizzando tutti gli schemi possibili di pesi.
Avremo portafogli composti da uno solo degli n titoli fino a portafogli con combinazioni arbitrarie di tutti n titoli costituiti variando i coefficienti ω_i in modo da realizzare tutte le combinazioni tali

che $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$



L'insieme dei punti corrispondenti a questi portafogli ha chiamato *regione possibile* o *ammissibile.* Esistono due definizioni della regione possibile e corrispondono rispettivamente alla possibilità di praticare la vendita allo scoperto ed alla assenza di tale possibilità.
La regione ammissibile che ammette la vendita allo scoperto contiene la regione definita escludendo questa opportunità.

4.13 INSIEME DI MINIMA VARIANZA e LA FRONTIERA EFFICIENTE

Il bordo sinistro della regione ammissibile prende il nome di *insieme di minima varianza* perché per ogni valore del tasso di rendimento medio il punto possibile avente varianza (o deviazione standard) minima è il corrispondente punto del bordo sinistro.
In questo insieme esiste un punto speciale a varianza minima che prende il nome di *punto di minima varianza.*
Supponendo che la scelta di portafoglio di un investitore sia limitata solo ad una determinata linea orizzontale ($\bar{r}$) allora *i portafogli su questa linea hanno stesso rendimento atteso ma deviazioni standard differenti.*
La maggior parte degli investitori preferirà il portafoglio corrispondente all'estremità sinistra della linea ovvero quel punto che alla media data farà corrispondere minima deviazione standard.
Questi investitori sono detti *avversi al rischio* mentre un investitore che seleziona un punto differente da quello di minima deviazione standard detto *propenso al rischio.*
La stessa argomentazione può essere applicata ai portafogli corrispondenti ai punti di linea verticale: gli investitori preferiranno il punto più alto della linea e sono detti *insaziabili* poiché a parità degli altri fattori desiderano sempre ricevere più denaro.
Ne deriva che gli investitori avversi al rischio e quelli caratterizzati da insaziabilità saranno interessati solo alla *parte superiore del insieme di minima varianza a partire dal punto di minima varianza.*
Questa parte prende il nome di *frontiera efficiente* della regione ammissibile e i portafogli che si trovano su di essa sono i portafogli efficienti perché per la maggior parte degli investitori sono le migliori combinazioni media-varianza.

4.12 MODELLO DI MARKOWITS

Il modello di Markowitz è la formulazione di un problema matematico che ci permette di individuare i portafogli di minima varianza, ovvero quelli che si trovano sulla frontiera.
Assumiamo che siano disponibili n titoli e per ciascuno di essi i tassi di rendimento attesi sono $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ e le covarianze sono $\sigma_{i,j}$ con $i, j = 1, 2, \dots, n$.
Ogni portafoglio è definito da una serie di n pesi ω_i con $i = 1, 2, \dots, n$ la cui somma è 1.
Scegliamo arbitrariamente un valore medio $\bar{r}$ e troviamo il portafoglio di varianza minima tra i portafogli possibili aventi questa media.

FOLMULAZIONE DEL PROBLEMA

Minimizzare $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$

con vincoli $\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i \bar{r}_i = \bar{r} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \end{cases}$

Il problema si affronta esplicitamente, la relazione tra il tasso di rendimento e la varianza del tasso di rendimento di un portafoglio.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI MARKOWITZ

Possiamo trovare le condizioni per una soluzione di questo problema utilizzando i *moltiplicatori di Lagrange* λ e μ associati ai vincoli. Seguirà la seguente *Lagrangiana:*

$$L(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \lambda, \mu) = \sum_{i,j=1}^{2} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{2} \omega_i \bar{r}_i - \bar{r}\right) - \mu\left(\sum_{i=1}^{2} \omega_i - 1\right) =$$

$$= \omega_1^2 \sigma_1^2 + 2\,\omega_1 \omega_2 \sigma_1 + \omega_2^2 \sigma_2^2 - \lambda(\omega_1 \bar{r}_1 + \omega_2 \bar{r}_2 - \bar{r}) - \mu(\omega_1 + \omega_2 - 1)$$

quindi:

$$d\,L / d\,\omega_1 = 2\,\omega_1 \sigma_1^2 + 2\,\omega_2 \sigma_{12} - \lambda\,\bar{r}_1 - \mu = 0$$

$$d\,L / d\,\omega_2 = 2\,\omega_2 \sigma_2^2 + 2\,\omega_1 \sigma_{12} - \lambda\,\bar{r}_2 - \mu = 0$$

che metteremo a sistema con i due vincoli:

$$d\,L / d\,\lambda = \omega_1 \bar{r}_1 + \omega_2 \bar{r}_2 - \bar{r}$$

$$d\,L / d\,\mu = \omega_1 + \omega_2 - 1$$

Notiamo come il caso con 2 titoli sia in realtà *degenere* perché le due incognite ω_1, ω_2 possono essere determinate unicamente dai due vincoli senza dover calcolare il valore dei moltiplicatori di Lagrange.

*PER n TITOLI

Per un portafoglio efficiente avente tasso di rendimento medio $\bar{r}$, gli n pesi ω_i per $i = 1, \ldots, n$ ed i due moltiplicatori di Lagrange λ e μ soddisfano

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\,\omega_j - \lambda\,\bar{r}_i - \mu = 0 \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

a sistema con

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \omega_i\,\bar{r}_i = \bar{r} \\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \end{cases}$$

Abbiamo quindi le n equazioni e le due equazioni dei vincoli per un totale di $n + 2$ equazioni; corrispondentemente abbiamo $n + 2$ incognite, ovvero gli n valori di ω_i più λ e μ.
Risolvendo queste equazioni si ottengono i pesi di un portafoglio efficiente con media $\bar{r}$.

ESEMPIO 2

Supponiamo vi siano tre titoli non correlati tutti con varianza 1 ($\sigma_1^2 = 1;\ \sigma_2^2 = 1;\ \sigma_3^2 = 1$) e con valori medi $\bar{r}_1 = 1,\ \bar{r}_2 = 2,\ \bar{r}_3 = 3$.
Essendo tra di loro non correlati si avrà $\sigma_{12} = 0,\ \sigma_{13} = 0,\ \sigma_{23} = 0$ e la corrispondente matrice varianza covarianza sarà:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Impostiamo ora il problema; in generale con n titoli occorre unire a $\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\,\omega_j - \lambda\,\bar{r}_i - \mu = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ i vincoli dei due titoli $\sum_{i=1}^{n} \omega_i\,\bar{r}_i = \bar{r}$ e $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

Le varie espressioni delle derivate parziali della lagrangiana possono essere altresì ottenute con $\Sigma\,\underline{\omega} - \lambda\,\underline{\bar{r}} - \mu\underline{1} = 0$. In questo caso avremo quindi:

$$\begin{cases} 1\,\omega_1 + 0\,\omega_2 + 0\,\omega_3 - \lambda\,1 - \mu = 0 \\ 0\,\omega_1 + 1\,\omega_2 + 0\,\omega_3 - \lambda\,2 - \mu = 0 \\ 0\,\omega_1 + 0\,\omega_2 + 1\,\omega_3 - \lambda\,3 - \mu = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \omega_1 - \lambda - \mu = 0 \\ \omega_2 - \lambda - \mu = 0 \\ \omega_3 - \lambda - \mu = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \lambda + \mu \\ \omega_2 = \lambda + 2\mu \\ \omega_3 = \lambda + 3\mu \end{cases}$$

Con i vincoli:

$$\begin{cases} \omega_1 + 2\omega_2 + 3\omega_3 = \bar{r} \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2(2\lambda + \mu) + 3(3\lambda + \mu) = \bar{r} \\ \lambda + \mu + 2\lambda + \mu + 3\lambda + \mu = 1 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} 14\lambda + 6\mu = \bar{r} \\ 6\lambda + 3\mu = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 14\lambda + 6(1/3 - 2\lambda) = \bar{r} \\ \mu = 1/3 - 2\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 14\lambda + 2 - 12\lambda = \bar{r} \\ \mu = 1/3 - 2\lambda \end{cases} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \lambda = \bar{r}/2 - 1 \\ \mu = 7/3 - \bar{r} \end{cases}$$

$$\omega_1 = \bar{r}/2 - 1 + 7/3 - \bar{r} = 4/3 - \bar{r}/2$$
$$\omega_2 = 2(\bar{r}/2) - 1 + 7/3 - \bar{r} = 1/3$$
$$\omega_3 = 3(\bar{r}/2) - 1 + 7/3 - \bar{r} = \bar{r}/2 - 2/3$$

Dove $\bar{r}$ è un parametro: se volessi un rendimento atteso del 400% allora dovrei sostituire $\bar{r} = 4$ ed otterrei
$\omega_1 = -2/3$ (vendita allo scoperto titolo 1)
$\omega_2 = 1/3$
$\omega_3 = 4/3$ (vado lungo sul titolo 3)

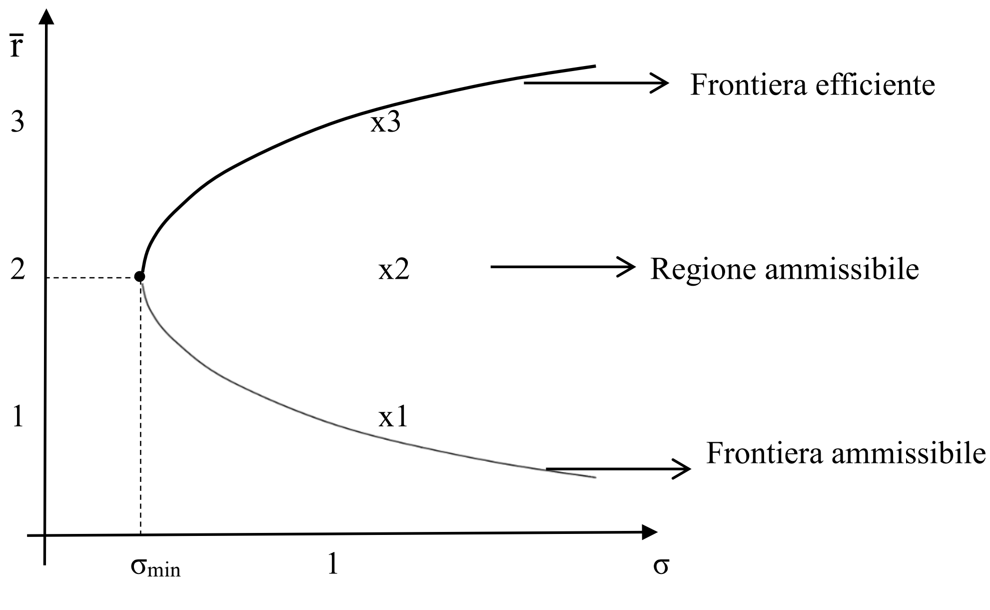
Calcolo varianza di questo portafoglio:
Dalla formula generale della varianza $\omega^T \Sigma \omega$ ottengo:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \omega_1 \;\; \omega_2 \;\; \omega_3 =$$

$$= (4/3 - \bar{r}/2)^2 + (1/3)^2 + (\bar{r}/2 - 2/3)^2 = 7/3 - 2\bar{r} + (\bar{r}/2)^2 = Var(r) = \sigma^2$$

Cerchiamo ora il punto in cui questa è minima: possiamo operare $\delta Var(r)/\delta r = 0$ oppure essendo una parabola questa avrà il suo minimo in corrispondenza di $-b/2a$ e cioè $2/(2 \cdot ½) = 2 = \bar{r}$. Quindi in $\bar{r} = 2$ questa avrà varianza minima pari ad $1/3$ e quindi deviazione standard pari a $\sqrt{1/3} = 0.58$

Riportiamo graficamente la situazione nel grafico media-deviazione standard:



PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

4.14 TEOREMA DEI DUE FONDI

La frontiera ammissibile o insieme di minima varianza gode di un'importante proprietà: i punti di questo insieme soddisfano il sistema di $n + 2$ equazioni lineari:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\,\omega_j - \lambda\,\bar{r}_i - \mu = 0 & i = 1, 2, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad n \text{ equazioni} \\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i\,\bar{r}_i = \bar{r} \\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \end{cases}$$

Supponiamo siano note due soluzioni $\omega_1 = (\omega_1^1, \omega_2^1, \ldots, \omega_n^1), \lambda^1, \mu^1$ e
$\omega_2 = (\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2), \lambda^2, \mu^2$ con tassi di rendimento attesi $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$.
Forniamo una combinazione moltiplicando la prima per α e la seconda per $1 - \alpha$.
Per *sostituzione diretta* vediamo che tale somma *è ancora soluzione delle* $n + 2$ *equazioni* e corrisponde al valore atteso $\alpha\, \bar{r}^1 + (1 - \alpha)\, \bar{r}^2$.
Osserviamo infatti che $\alpha\, \underline{\omega}^1 + (1 - \alpha)\, \underline{\omega}^2$ è un *portafoglio leggittimo* con pesi la cui somma è 1,

quindi il vincolo $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$ è soddisfatto.

Inoltre il rendimento atteso è $\alpha\, \bar{r}^1 + (1 - \alpha)\, \bar{r}^2$ e quindi per tale anche il vincolo $\sum_{i=1}^{n} \omega_i\, \bar{r}_i = \bar{r}$ è soddisfatto.
Infine poiché entrambe le soluzioni rendono uguale a zero il membro sinistro delle n equazioni del sistema di Lagrange allora lo stesso vale per la loro combinazione ed anche

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij}\, \omega_j - \lambda\, \bar{r}_i - \mu = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$ sono soddisfatte.

Questo implica che anche il portafoglio combinato $\underline{\omega}^1 + (1 - \alpha)\, \underline{\omega}^2$ *è una soluzione* e cioè rappresenta un ??? dell'insieme di minima varianza.

- Supponiamo che $\underline{\omega}^1$ e $\underline{\omega}^2$ siano due differenti portafoglio dell'insieme di minima varianza; allora al variare di α nell'intervallo $-n < \alpha < n$ i portafogli definiti da $\underline{\omega}^1 + (1 - \alpha)\, \underline{\omega}^2$ coprono l'intero insieme di minima varianza.
  Ovviamente possiamo scegliere come soluzioni iniziali due soluzioni efficienti (appartenenti alla porzione superiore dell'insieme di minima varanza) e *queste genereranno tutti gli altri punti efficienti.*

❖ TEOREMA DEI DUE FONDI
E' possibile individuare due fondi (portafogli) efficienti tali che *tutti i portafogli efficienti possono essere riprodotti, in termini di media e di varianza, come loro combinazione.* Cioè, per gli investitori che cercano portafogli efficienti è sufficiente investire in combinazioni di questi due fondi.

4.15 TEOREMA DI UN FONDO (FACOLTATIVO)

Fino ad ora abbiamo implicitamente assunto che gli n titoli disponibili fossero rischiosi e cioè che ognuno di essi avesse $\sigma > 0$.
I titoli non rischiosi hanno rendimenti deterministici (noti con certezza) e quindi $\sigma = 0$; sono quindi strumenti puramente fruttiferi e la loro inclusione nel portafoglio corrisponde alla concessione o all'ottenimento di un prestito al tasso senza rischio.
Tale inclusione di un titolo non rischioso introduce una degenerazione matematica che semplifica la forma della frontiera efficiente.
Supponiamo che sia disponibile un titolo non rischioso con tasso di rendimento r_ρ.
Consideriamo un altro titolo rischioso con tasso di rendimento r_R con media $\bar{r}_R$ e varianza σ_R^2.
La covarianza di questi due rendimenti deve essere 0 essendo ???.
Supponiamo ora di combinare questi due titoli per formare un portafoglio utilizzando il peso $1 - \alpha$ per il titolo non rischioso ed il peso α per il titolo rischioso con $\alpha \leq 1$.

Il tasso di rendimento medio di questo portafoglio sarà $\alpha\ \bar{r}_R + (1 - \alpha)\ \bar{r}_\rho$ e la deviazione standard del rendimento sarà $\sqrt{(\alpha^2\ \sigma_R^2)} = \alpha\ \sigma_R$ perché il rendimento del titolo non rischioso ha varianza pari a 0 e covarianza nulla con il rendimento del titolo non rischioso; l'unico termine rimanente nella formula è quello relativo al titolo rischioso.
Dalla definizione di deviazione standard del portafoglio possiamo esplicitare α.
$\sigma_{portafoglio} = \alpha\ \sigma_R \Rightarrow\ \alpha = \sigma/\sigma_R$ che possiamo sostituire nella formula del rendimento medio del portafoglio ottenendo $\bar{r}_{portafoglio} = \sigma/\sigma_R\ \bar{r}_R + (1 - \sigma/\sigma_R) r_\rho\ =\ r_\rho + \sigma/\sigma_R (r_\rho - r_R)$ che è una retta che unisce il titolo non rischioso con il titolo rischioso.

Se nel formare queste combinazioni ammettiamo che il titolo non rischioso possa essere prestato o ricevuto in prestito, mentre i titoli rischiosi possano essere solo acquistati, allora dalle nuove combinazioni è possibile identificare una semiretta per ciascun titolo rischioso che si origina dal titolo non rischioso. L'insieme di queste rette forma una regione possibile di forma triangolare. Quando tra i titoli ammissibili viene incluso un titolo non rischioso, la regione possibile p un triangolo infinito.

ESERCIZI PROPOSTI

- ***ESERCIZIO 1***

Dati 3 titoli con rendimento atteso $\bar{r}_1 = 5\%$, $\bar{r}_2 = 10\%$, $\bar{r}_3 = 7\%$ e matrice di varianza e covarianza

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare il rendimento atteso E e la varianza V di un portafoglio con pesi w = (1/2, 1/4, 1/4). Il portafoglio w è efficiente?

Svolgimento:

Sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{pmatrix}$ vettore rendimenti

e Σ matrice varianza-covarianza

$E = \vec{w}' x\ \vec{v}$ $\qquad V = \vec{w}' \Sigma\ \vec{w}$

Il portafoglio non è efficiente perché il rango della matrice $(\Sigma\ \vec{w}\ |\ \vec{v}\ |\ \vec{1})$ è pari a 3 mentre il rango di $(\vec{v}\ |\ \vec{1})$ è pari a 2

- ***ESERCIZIO 2***

Siano A e B due fondi efficienti con rendimenti attesi $\bar{r}_A = 15\%$ e $\bar{r}_B = 5\%$, deviazioni standard $\sigma_A = 0.1$, $\sigma_B = 0.1$ e correlazione $\rho = 0.4$. Si vogliono investire X = 1500 € in un portafoglio efficiente

con rendimento atteso $\bar{r} = 10\%$. Determinare quanto denaro X_A occorre investire nel fondo A

Svolgimento:

$\alpha\, r_A + (1 - \alpha)\, r_B = r \quad \Rightarrow \quad \alpha = (r - r_B)/(r_A - r_A) = 0.5$

$\mathbf{X_A = \alpha \cdot X = 0.5 \cdot 1500 = 750}$ **€**

- ***ESERCIZIO 3[domanda multiple choise] (in neretto la risposta corretta)***

Un portafoglio è composto da obbligazioni di duration $D_1 = 2$ anni e $D_2 = 10$ anni. Se il portafoglio ha duration $D = 7$ e valore attuale $V = 200$, quale è il valore V_1 dell'investimento nelle obbligazion di duration D_1?

(a) $0 \leq V_1 < 50$
(b) $50 \leq V_1 < 65$
(c) $\mathbf{65 \leq V_1 < 85}$
(d) $85 \leq V_1 < 120$
(e) Nessuno dei precedenti

Svolgimento:

Sia α la percentuale del valore totale investito nelle obbligazioni di duration D_1 e $(1 - \alpha)$ il resto.

Allora $D = \alpha D_1 + (1 - \alpha) D_2$ quindi $\alpha = D - D_2 / D_1 - D_2$

Di conseguenza $\mathbf{V_1 = \alpha\, V = 75}$

- ***ESERCIZIO 4***

Un mercato è composto da tre titoli rischiosi aventi rendimenti indipendenti. I rendimenti attesi sono rispettivamente $\bar{r}_1 = 1$, $\bar{r}_2 = 2$, $\bar{r}_3 = 1$ e le deviazioni standard $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 2$. L'investimento di 150000 € nel primo titolo e di 50000 € nel terzo è efficiente?

Svolgimento:

Affinchè un portafoglio $\vec{w}$ sia efficiente è necessario e sufficiente che il vettore $\Sigma\vec{w}$ sia linearmente dipendente dai vettori $\vec{1}$ ed $\vec{r}$. Dato che $\vec{1}$ ed $\vec{r}$ sono tra loro indipendenti basta calcolare il rango di $[\Sigma\vec{w} \mid \vec{1} \mid \vec{r}\,]$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 150/200 = 3/4 \\ 0 \\ 50/200 = 1/4 \end{pmatrix}$$

Il portafoglio non è efficiente $\boxed{\begin{matrix} \mathbf{r_2 = 1,\ r_3 = 2} \\ \mathbf{r_2 = 1,\ r_3 = 2} \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} \mathbf{r_2 = 2,\ r_3 = 1} \\ \mathbf{r_2 = 2,\ r_3 = 1} \end{matrix}}$

- ***ESERCIZIO 5***

In un mercato con n titoli i due portafogli A e B sono efficienti in media e varianza. I loro rendimenti attesi sono $\bar{r}_A = 50\%$, $\bar{r}_B = 10\%$ e le deviazioni standard sono $\sigma_A = 40\%$, $\sigma_B = 10\%$. La correlazione tra i rendimenti è $\rho = 0.8$. Calcolare il valore minimo della varianza σ^2 degli investimenti aventi rendimento atteso pari a $\bar{r} = 20\%$.

(a) $0 \leq \sigma^2 < 0.03$
(b) $0.03 \leq \sigma^2 < 0.07$
(c) $0.07 \leq \sigma^2 < 0.11$
(d) $0.11 \leq \sigma^2 < 0.14$
(e) Nessuno dei precedenti

Per il teorema dei due fondi la frontiera eff. si ottiene tramite combinazioni lineari convesse dei due portafogli. Quindi la varianza minima corrispondente al rendimento $\bar{r}$ si ottiene risolvendo

$\alpha\bar{r}_A + (1-\alpha)\,\bar{r}_B = \bar{r} \quad \Rightarrow \quad \alpha = (\bar{r} - \bar{r}_B)/\,\bar{r}_A - \bar{r}_B$

e calcolando la corrispondente varianza

$\sigma^2 = \alpha\,\sigma^2_A + 2\alpha(1-\alpha)\rho\,\sigma_A\,\sigma_B + (1-\alpha)\,\sigma^2_B$

- ***ESERCIZIO 6***

Considerare un mercato con 3 titoli, tutti con lo stesso rendimento atteso R = 10% e con matrice di varianza-covarianza de rendimenti

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcolare il rendimento atteso E e la varianza del rendimento V del portafoglio $\bar{\omega}$ ottenuto investendo $X_1 = 3500$ € nel primo titolo, $X_2 = 4000$ € nel secondo titolo, $X_3 = -2500$ € nel terzo titolo.

Svolgimento:

$\bar{\omega} = [X_1/(X_1 + X_2 + X_3),\;\; X_2/(X_1 + X_2 + X_3),\;\; X_3/(X_1 + X_2 + X_3)]$

$$\mathbf{E} = \bar{\omega}' \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{V} = \bar{\omega}'\,\Sigma\,\bar{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} = \mathbf{1.72}$$

- ***ESERCIZIO 7***

Un mercato è composto da tre titoli rischiosi, con lo stesso rendimento atteso $\bar{r}$, e matrice di varianza-covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Q

Quale tra i tre titoli rischiosi risulta efficiente in media-varianza?

Un portafoglio $\underline{\omega}$ è efficiente se il vettore $\Sigma\omega$ è linearmente dipendente dai vettori $\vec{r} = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. In questo caso, per il primo titolo $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi $\Sigma\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ che è dipendente da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{pmatrix}$, quindi è efficiente. Per il secondo titolo : $\Sigma\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, che è indipendente, quindi non è efficiente. Per il terzo titolo $\Sigma\omega = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$ è indipendente, quindi non efficiente.

- ***ESERCIZIO 8***

Considerare un portafoglio così composto:
- ***2 milioni di € investiti in obbligazioni di duration D_1***
- ***5 milioni di € investiti in obbligazioni di duration D_2***
- ***8 milioni di € investiti in obbligazioni di duration D_3***

(a) $0 \leq D < 5$
(b) $5 \leq D < 7$
(c) $7 \leq D < 11$
(d) $11 \leq D < 13$
(e) Nessuno dei precedenti

Svolgimento:

Il valore totale dell'investimento è $V_0 = 2 + 5 + 8 = 15$

$$\mathbf{D = 2/15\ D_1 + 5/15\ D_2 + 8/15\ D_3 = 6.2}$$

- ***ESERCIZIO 9***

I due portafogli A e B sono efficienti in media e varianza. I loro rendimenti attesi sono $\bar{r}_A = 30\%$ e

$\bar{r}_B = 10\%$, deviazioni standard $\sigma_A = 40\%$, $\sigma_B = 20\%$ e correlazione $\rho = 0.8 \bar{r} = 50\%$. Come investire un capitale $C = 1000$ in modo ottimale per ottenere un rendimento atteso $\bar{r}$? indicare il denaro H investito nel primo portafoglio.

(a) $H < 0$
(b) $0 \leq H < 1500$
(c) $1500 \leq H < 2500$
(d) $2500 \leq H < 3500$
(e) $3500 \leq H < 4500$
(f) Nessuno dei precedenti

Svolgimento:

$\alpha \bar{r}_A + (1 - \alpha) \bar{r}_B = \bar{r}$ => $\alpha = (\bar{r} - \bar{r}_B)/ \bar{r}_A - \bar{r}_B$

$H = \alpha C = 2000$

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

- ***ESERCIZIO 10***

Con gli stessi dati dell'esercizio precedente, investendo il capitale C nel portafoglio efficiente a varianza minima, calcolare il valore atteso E dell'investimento.

(a) $E < 0$
(b) $0 \leq E < 100$
(c) $100 \leq E < 1100$
(d) $1100 \leq E < 1700$
(e) $1700 \leq E < 2200$
(f) $2200 \leq E$

Svolgimento:

Varianza di un portafoglio: $(\alpha, 1-\alpha)$ $V = \alpha^2\sigma_A^2 + 2\alpha(1-\alpha)\,\sigma_{AB} + (1-\alpha)^2\sigma_B^2$

$dV/d\alpha = 2\alpha\sigma_A^2 + 2(1-2\alpha)\,\sigma_{AB} + 2(1-\alpha)\sigma_B^2 = 0$

$\alpha_{min} = (\sigma_B^2 - \sigma_{AB})/(\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)$

$$\mathbf{E = C[\alpha_{min}\,\bar{r}_A + (1 - \alpha_{min})\,\bar{r}_B] = 1033.33}$$

- ***ESERCIZIO 11***

Si consideri un mercato composto da titoli rischiosi e da uno non rischioso che rende $R_f = 3\%$. C'è inoltre un portafoglio efficiente di soli titoli rischiosi che rende $x = 4\%$. Determinare la quota α di titolo non rischioso del portafoglio efficiente avente rendimento atteso del 9%.

(a) $-10 \leq \alpha < -6$
(b) $-6 \leq \alpha < -3$
(c) $-3 \leq \alpha < -1$
(d) $-1 \leq \alpha < 1$
(e) $1 \leq \alpha < 4$
(f) Nessuno dei precedenti

Svolgimento:

Per determinare α risolviamo l'equazione:

$$\mathbf{\alpha R_f + (1-\alpha)x = 9\% \quad \Rightarrow \quad \alpha = (9\% - x)/(R_f - x) = -5}$$

- ***ESERCIZIO 12***

Consideriamo due titoli rischiosi. I rendimenti attesi sono rispettivamente $\bar{r}_A = 0.2$ e $\bar{r}_B = 0.4$, le volatilità $\sigma_A = 0.1$, $\sigma_B = 0.2$ e correlazione $\rho = 0.5$. Determinare il valore atteso e varianza del rendimento del portafoglio $\omega = (1/4, 3/4)$

Svolgimento:

$$\mathbf{E = 1/4\bar{r}_A + 3/4\bar{r}_B = 0.35}$$

$$\mathbf{V = (1/4)^2\, \sigma_A{}^2 + 2(1/4)(3/4)\rho\sigma_A\sigma_B + (3/4)^2\, \sigma_B{}^2 = 0.0268}$$

- ***ESERCIZIO 13***

In un mercato con n titoli il portafoglio margine (o tangente) ha rendimento atteso $\bar{r}_M$ e deviazione standard σ_M, mentre il titolo non rischioso ha rendimento r_f.

- ***Determinare la composizione ottimale tra portafoglio margine e titolo non rischioso per ottenere un rendimento $\bar{r}$.***
- ***Qual è la deviazione standard minima σ che si può ottenere per realizzare un rendimento atteso pari a $\bar{r}$?***
- ***Qual è il massimo rendimento atteso $\bar{r}_e$ che si può realizzare a fronte di una deviazione standard σ_e?***

Svolgimento:

- Indicando con α l'investimento nel titolo non rischioso e con 1 – α l'investimento nel portafoglio margine, si ottiene:

$$\mathbf{\alpha r_f + (1 - \alpha)\, \bar{r}_m = \bar{r} \quad \Rightarrow \quad \alpha = (\bar{r} - \bar{r}_m)/(r_f - \bar{r}_m)}$$

- la deviazione standard minima è

$$\mathbf{\sigma = (1 - \alpha)\, \sigma_M}$$

- per ottenere una deviazione standard σ_e investo β nel titolo non rischioso e (1 – β) nel portafoglio margine, con

$$(1 - \beta)\, \sigma_M = \sigma_e \quad \Rightarrow \quad (1 - \beta) = \sigma_e / \sigma_M \quad \Rightarrow \quad \beta = 1 - \sigma_e / \sigma_M$$

Quindi il max rendimento atteso è:

$$\mathbf{\bar{r}_e = \beta\, r_f + (1 - \beta)\, \bar{r}_M = (1 - \sigma_e / \sigma_M) + \sigma_e / \sigma_M\ \bar{r}_m}$$

- ***ESERCIZIO 14***

I titoli A e B sono efficienti in media e varianza. Il rendimento del titolo A ha media m_A e deviazione standard σ_A, mentre quello del titolo B ha media m_B e deviazione standard σ_B. La correlazione tra i due rendimenti è pari a ρ. Dire se in un tale mercato è possibile e, in tal caso, dire come investire nei seguenti portafogli:

- ***Un portafoglio con lo stesso rendimento atteso di B ma con la metà della sua varianza***
- ***Un portafoglio con la stessa varianza di A ma con il doppio del suo rendimento atteso***

Qual è la varianza minima di un portafoglio che ha il doppio del rendimento atteso di B?

Svolgimento:

- **Non è possibile perché B è efficiente**

- **Non è possibile perché A è efficiente**

Per il teorema dei due fondi tutti i portafogli efficienti si ottengono combinando A e B. Il portafoglio efficiente che ha rendimento atteso $2m_B$ si trova risolvendo

$$\alpha m_A + (1 - \alpha)\, m_B = 2m_B \quad \Rightarrow \quad \alpha = m_B/(m_A - m_B)$$

La varianza di tale portafoglio

$$\boldsymbol{\sigma = \alpha^2\, \sigma_A^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\rho\, \sigma_A\, \sigma_B + (1 - \alpha)^2\, \sigma_B^2}$$

è la varianza minima.

- ***ESERCIZIO 15***

I titoli A, B e C sono efficienti in media e varianza. Il rendimento atteso di B è pari alla media tra i rendimenti attesi di A e C. La correlazione tra i rendimenti di A e di C è 0.5. Le loro deviazioni standard sono $\sigma_A = 10\%$ e $\sigma_C = 30\%$. Determinare la varianza dei rendimenti di B.

Svolgimento:

Dato che i tre titoli sono efficienti, ciascuno di loro lo si può ottenere come combinazione degli altri due. Quindi B si ottiene combinando A e C nel seguente modo:

$$\alpha_A\, m_A + \alpha_C\, m_C = 1/2\; m_A + 1/2\; m_B \quad \Rightarrow \quad \alpha_A = 1/2, \quad \alpha_C = ½$$

$$\boldsymbol{\sigma_B^2 = \alpha_A^2\, \sigma_A^2 + \alpha_C^2\, \sigma_C^2 + 2\, \alpha_A\, \alpha_C\, \rho\, \sigma_A\, \sigma_C}$$

DOMANDE APERTE

1. ***[RENDITA PERPETUA]***
   E' noto che il valore attuale di una rendita posticipata perpetua con rata annuale costante A è $V_0 = A/i$ e la sua duration è $D = 1 + 1/i$ dove i è il tasso di interesse annuo. Utilizzare questi risultati per determinare il VA e la duration di una rendita perpetua anticipata con rata costante A.

Risposta:

$V'/V = -D/(1 + i) \Rightarrow (-A/i^2)/A(1/i) = -D/(1 + i) \Rightarrow (-1/i^2)/(1/i) = -D/(1 + i) \Rightarrow$

$\Rightarrow [(1+i)/i^2]/(1/i) = D \Rightarrow D = (1+i)/i^2 \cdot i/1 \Rightarrow \mathbf{D = (1+i)/i = 1/i + 1}$

2. ***[RENDITA FINITA POSTICIPATA]***
   Determinare e dimostrare la formula che esprime il VA di una rendita a rata costante finita e posticipata.

Risposta:

Una rendita di durata V si ottiene come differenza di una rendita infinita con primo pagamento in t = 1 ed una rendita infinita con primo pagamento in t = N – 1.
Il suo valore in 0 quindi è

$$\mathbf{V_0 = I/i - I/i \cdot d^n = I \cdot (1 - d^n)/i}$$

3. ***[EQUIVALENZA DEI TASSI]***
   La relazione fondamentale tra fattori di sconto a pronti e a termine è:

$$d(t, s) = d(t, T)d(t, T, s), \qquad t < T < s$$

Utilizzare tale relazione per dimostrare che

$$d(0, t_1, t_3) = d(0, t_1, t_2)d(0, t_2, t_3), \qquad 0 < t_1 < t_2 < t_3$$

Risposta:

1° membro dell'uguaglianza è:

$$d(0, t_1, t_3) = d(0, t_3)/ d(0, t_1)$$

2° membro dell'uguaglianza è:

$$d(0, t_1, t_2)\, d(0, t_2, t_3) = d(0, t_2)/ d(0, t_1) \cdot d(0, t_3)/ d(0, t_2) = d(0, t_3)/ d(0, t_1)$$

I due membri dell'uguaglianza sono uguali.

4. ***[REGOLA 7-10]***
   La regola del 7-10 dice che affinchè un capitale raddoppi al tasso del 7% annuo occorre attendere circa 10 anni (mentre al tasso del 10% occorre attendere circa 7 anni). Dimostrare in modo analogo, utilizzando il fatto che log(3) = 11/10, che affinchè il capitale in 10 anni triplichi, il tasso debba essere circa del 11%.

Risposta:

Si risolve rispetto a i l'equazione:

$$3C = C(1 + i)^{10} \qquad \text{con } C = \text{capitale investito al tempo } 0$$

La soluzione non dipende da C:

$$\log(3) = 10 \log(1 + i)$$

ma

$$\log(3) \approx 11/10 \qquad e \qquad \log(1 + i) \approx i$$

da cui

$$11/10 \approx 10 \cdot i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{i \approx 11/100 \approx 11\%}$$

5. ***[ARBITRAGGIO & TASSI SPOT E FORWARD]***
   Enunciare e dimostrare la relazione fondamentale tra tassi spot e tassi forward, indicando con $s(t_1)$ il tasso spot con scadenza tra t_1 anni, con $s(t_2)$ il tasso spot con scadenza tra t_2 anni e con $f(t_1, t_2)$ il tasso forward tra t_1 e t_2 con $t_1 < t_2$

Risposta:

In regime di capitalizzazione composta la relazione risulta essere

$$\mathbf{[1 + f(t_1, t_2)]^{t_2 - t_1} = [1 + s(t_2)]^{t_2}/[1 + s(t_1)]^{t_1}}$$

Supponiamo che, al contrario, valga

$$[1 + f(t_1, t_2)]^{t_2 - t_1} > [1 + s(t_2)]^{t_2}/[1 + s(t_1)]^{t_1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad [1 + s(t_1)]^{t_1} [1 + f(t_1, t_2)]^{t_2 - t_1} > [1 + s(t_2)]^{t_2}$$

Allora si può operare un arbitraggio nel modo seguente:

a t = 0 prendiamo in prestito 1 € al tasso $s(t_2)$, impegnandoci perciò a restituire $[1 + s(t_2)]^{t_2}$ al tempo t_2. Sempre a t = 0 investiamo, per un tempo pari a t_1, tale euro su un deposito che paga il

tasso $s(t_1)$ e al contempo ci impegniamo per un deposito pari a $[1 + s(t_1)]^{t_1}$ euro al tasso $f(t_1, t_2)$ per il periodo $[t_1, t_2]$.
Al tempo t_2 i soldi depositati avranno generato il capitale $[1 + s(t_1)]^{t_1} [1 + f(t_1, t_2)]^{t_2 - t_1}$ superiore all'importo del prestito da restituire.
Se vale la disuguaglianza opposta, l'arbitraggio si prova con un analogo ragionamento.
Altrimenti, con un procedimento simile al precedente, si può dimostrare la medesima relazione utilizzando i fattori di sconto a pronti e a termine

$$[1 + s(t_1)]^{-t_1} [1 + f(t_1, t_2)]^{-(t_2 - t_1)} > [1 + s(t_2)]^{-t_2}$$

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

6. ***[BANCA IDEALE + RISCHIOSITA' TITOLI ZCB]***
   Consideriamo un mercato in cui opera una banca ideale con tasso annuo r = 8%. Sia t un titolo che rimborsa un importo costante I = 8 ogni 2 anni per sempre.

– ***Determinare il VA della rendita***
– ***Il titolo t è più o meno rischioso (dal punto di vista della semestralità alle variazioni del tasso di interesse) di uno ZCB che scade tra 20 anni?***

Risposta:

– $V = I \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1 + t)^{-2k} = I/(d_2 - 1)$ dove $d_2 = (1 + r)^{-2}$

cioè $V = I/(1 + r)^2 - 1 = I/r_2$ dove $r_2 = (1 + r)^2 - 1$ che è il tasso biennale equivalente a r

– Il titolo più rischioso è quello con duration maggiore.

Il titolo I ha duration D_T :

$V \cdot D_T/(1 + r) = - V'$ dove $V' = d/d_r \cdot I/(1 + r)^2 - 1 = I \cdot (r^2 + r)/ (r^2 + 2r)^2$

Quindi $D_T = [(2r + 2)(r + 1) (r^2 + 2r)]/ (r^2 + 2r)^2 = [2(r + 1)(r + 1)]/ r(r + 2) = 2(r + 1)^2/[r(r + 2)]$ =>

=> ZCB 20 anni di duration

7. ***[REGOLA 7-10]***
La regola del 7-10 dice che perché un capitale raddoppi al tasso del 7% annuo occorre attendere circa 10 anni, mentre al tasso del 10% annuo occorre attendere circa 7 anni. Dimostrarlo.

Risposta:

Risolvendo rispetto a t: $(1 + r)^t = 2$ si ottiene: $t = \log(2)/\log(1 + r)$

Usando le approssimazioni: $\log(2) \approx 7/10$ e $\log(1 + r) \approx r$

Quindi $t \approx 7/10 \cdot 1/r$ =>

$$\Rightarrow \begin{cases} t \approx 10 \quad \text{per} \quad r = 7/100 = 0.07 = 7\% \\ t \approx 7 \quad \text{per} \quad r = 10/100 = 0.10 = 10\% \end{cases}$$

8. ***[STRUTTURA DEI TASSI]***
Data la struttura dei fattori di sconto a pronti d(0, 1) = 0.98, d(0, 2) = 0.97, d(0, 3) = 0.96, d(0, 4) = 0.955, calcolare:
– ***Il prezzo a pronti e la duration del flusso x|t = (10, 0, 110)|(2, 3, 4)***
– ***L'importo I per cui il flusso x|t = (−1000, I, I, 1000 + I)|(0, 1, 2, 3) è equo (ha valore nullo) in t = 0***

Risposta:

– Prezzo a pronti $\mathbf{V_0 = 10d(0, 2) + 110d(0, 4) = 10 \cdot 0.97 + 110 \cdot 0.955 = 114.75}$

Duration = $\mathbf{(10 \cdot 2 \cdot 0.97 + 110 \cdot 4 \cdot 0.955)/114.75 = 3.83}$

– I: $-1000 + I\,d(0, 1) + I\,d(0, 2) + (1000 + I)\,d(0, 3) = 0$

$-1000 + I\,0.98 + I\,0.97 + I\,0.96 + 960 = 0$

$I(0.98 + 0.97 + 0.96) = 40$ => $\mathbf{I = 40/2.91 = 13.7457}$

9. [RENDITA PERPETUA]

Sia r = 10% il tasso di interesse annuo della legge di capitalizzazione continua $V_0 = e^{rt}$; calcolare il valore attuale, rispetto a tale legge, di una rendita perpetua che paga 10 € al mese ogni mese a partire dal prossimo

Risposta:

$V_0 = 10 \cdot d_m + V_0 \cdot d_m$ => $V_0 = 10d_m/(1 - d_m)$ $d_m = e^{-r \cdot 1/12}$

$d_m = e^{-r \cdot 1/12}$ ed $r = 0.1$ => $d = e^{-0.1 \cdot 1/12} = 0.9917$

quindi $\mathbf{V_0 = 10d_m/(1 - d_m) = 9.917/0.0083 = 1194.82}$

10. [ARBITRAGGIO, TASSI SPOT & FORWARD]

Enunciare e dimostrare, mostrando come costruire un arbitraggio, la relazione fondamentale tra tassi spot e tassi forward, indicando con $s(t_1)$ il tasso spot con scadenza tra t_1 anni, con $s(t_2)$ il tasso spot con scadenza tra t_2 anni e con $f(t_1, t_2)$ il tasso forward tra t_1 e t_2 con $t_1 < t_2$

Risposta:

$$\mathbf{[1 + s(t_1)]^{t_1}\,[1 + f(t_1, t_2)]^{t_2 - t_1} > [1 + s(t_2)]^{t_2}}$$

Per dimostrare la relazione, consideriamo la seguente strategia

	0	**t_1**	**t_2**
(a) All'istante 0 prestiamo 1€ al tasso $s(t_2)$ fino a t_2	-1	0	$[1 + s(t_2)]^{t_2}$
(b) All''istante 0 prendiamo in prestito 1€ al tasso $s(t_1)$ per restituirlo in t_1	1	$-[1 + s(t_1)]^{t_1}$	0
(c) All'istante 0 prendiamo a prestito a termine $[1 + s(t_1)]^{t_1}$€ con consegna in t_1 e restituzione in t_2	0	$[1 + s(t_1)]^{t_1}$	$[(1 + s)(t_1)]^{t_1}(1 + f)^{t_2}$
	0	0	$[1 + s(t_2)]^{t_2} -$ $-[(1 + s)(t_1)]^{t_1}(1 + f)^{t_2}$

$[1 + s(t_2)]^{t_2} - [(1 + s)(t_1)]^{t_1}(1 + f)^{t_2}$ è la quantità disponibile in t_2 deve essere nulla, altrimenti si potrebbe realizzare un arbitraggio.

L'arbitraggio si ha quando $[1 + s(t_1)]^{t_1} [1 + f(t_1, t_2)]^{t_2 - t_1} \neq [1 + s(t_2)]^{t_2}$

Posizione passiva (o debito) : 2° membro

Posizione attiva (o credito) : 1° membro

Nel caso in cui PA > PP => arbitraggio vantaggioso

Nel caso in cui PA < PP => arbitraggio svantaggioso

11. [TIR]
Il valore attuale di un titolo che paga cedole costanti I e rimborsa il capitale a scadenza è

$$V_0 = I/(1 + r) + I/(1 + r)^2 + \ldots + (C + I)/(1 + r)^n$$

Dimostrare che, se il titolo quota alla pari, il tasso interno di rendimento è pari al tasso cedolare I/C.

Risposta:

Se il titolo quota alla pari, il suo valore coincide con C_1', quindi

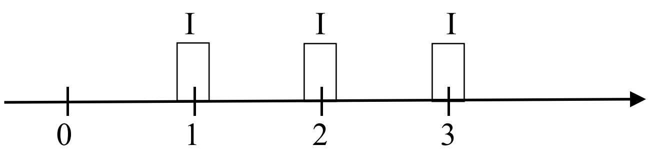
$$C = I \cdot \sum_{k=1}^{n} (1 + r)^{-n} + C\,(1 + r)^{-n} \quad \Rightarrow \quad C = I\,(1 - d^n)/r + C\,d^n \qquad \text{dove} \quad d = (1 + r)^{-1}$$

$$C\,(1 - d^n) = I\,(1 - d^n)/r \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{r = I/C}$$

In altre parole tutta la domanda è una riscrittura della formula iniziale che porta r = I/C

12. [RENDITA PERPETUA]
Dimostrare che se il tasso di interesse annuo è r, il valore attuale di una rendita perpetua che paga cedola costante I ogni anno è I/r

Risposta:



$$V_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 + r)^{-k}\, I \qquad \text{quindi} \qquad V_0 = (1 + r)^{-1}\, I + (1 + r)^{-1}\, V_0$$

cioè $V_0(1 + r) = I + V_0$ => $\mathbf{V_0 = I/r}$

13. [RENDITA INFINITA PERPETUA]
Considerare la legge di capitalizzazione degli interessi composti annualmente rispetto ad un tasso annuo i:

$$W_0 = W_0 (1 + i)^t$$

Ricavare le formule per calcolare in funzione di i il valore attuale V_0 e la duration di una rendita infinita anticipata a rata semestrale costante pari a I

Risposta:

Sia i_s il tasso semestrale equivalente: $i_s = (-1 + i)^{1/2} - 1$

Il VA della rendita si ottiene risolvendo: $V_0 = I + V_0\, d_s$ dove $d_s = (1 + i_s)^{-1}$

Quindi $\mathbf{V_0 = I/(1 + d_s) = I(1 + 1/r_s)}$

Per calcolare la duration D utilizziamo la relazione: $V_0'/ V_0 = D/(1 + r_s)$

E dato che $V_0' = -I/ r_s^2$ sostituendo si ha $(-I/ r_s^2)/ I(1 + 1/r_s) = D/(1 + r_s)$ =>

=> $\mathbf{D = 1/ r_s}$

Da notare che tale duration è espressa in semestri. Per tornare su base annua occorre dividere il valore ottenuto per 2.

14. [RENDITA INFINITA]
Considerare la legge di capitalizzazione degli interessi composti annualmente rispetto ad un tasso annuo r

$$W_t = W_0 (1 + r)^t$$

Si consideri una rendita di durata infinita che paga l'importo I tutti gli anni pari a partire dal secondo anno. (cioè il flusso di pagamento della rendita sarà (I, 2I, I, 2I, I, 2I, …)|(1, 2, 3, 4, 5, 6, …))
Calcolare V_0, il VA in t = 0 della rendita in funzione di I e di r.

Risposta:

Sia r_b il tasso biennale $r_b = (-1 + r)^2 - 1$

Il valore al tempo 0 del flusso dei pagamenti degli anni pari è $V_0^P = 2I/ r_b$

Il valore al tempo 0 del flusso dei pagamenti degli anni dispari è $V_0^D = I/ r_b \cdot (1 + r)$

Il valore attuale sarà $\mathbf{V_0 = V_0^P + V_0^D = I/ r_b \cdot (2 + 1 + r) = I\ [(3 + r)/r(2 + r)}$

15. *[RENDITA INFINITA POSTICIPATA]*

Una rendita infinita posticipata con rata annuale I ha la stessa duration e lo stesso yield to maturity di uno ZCB che scade in T. Se lo ytm e y = 5%, calcolare il valore di T.

Risposta:

La rendita infinita posticipata ha duration $D = 1 + 1/y$

Se ha la stessa rata dello ZCB segue che $D = T$ quindi $\mathbf{T = 1 + 1/y = 1 + 100/5 = 21}$

16. *[$a_{n\rceil\, r}$]*

Mostrare come si ricava la formula per " a figurato n al tasso r", cioè

$$a_{n\rceil\, r} = [1 - (1 + r)^{-n}]/r$$

Risposta:

Dato un flusso di cassa del tipo (R, R, R, …, R)|(0, 1, 2, …, n)

allora il valore attuale può essere calcolato come $VA_0 = R + R(1 + r)^{-1} + R(1 + r)^{-2} + \ldots + R(1 + r)^{-n}$

e definendo $d = (1 + r)^{-1}$ si avrà $VA_0 = R + Rd + Rd^2 + \ldots + Rd^n$

o ancora $VA_0 = R + R \sum_{k=1}^{n} d^k$

E' una serie geometrica per cui: $S_n = \sum_{k=1}^{n} d^k$ moltiplico per d => $d\, S_n = \sum_{k=1}^{n} d^{r+1}$

Sottraggo la 2ª serie alla 1ª => $S_n - d\, S_n = \sum_{k=1}^{n} d^k - \sum_{k=1}^{n} d^{r+1}$ =>

=> $S_n (1 - d) = d - d^{n+1}$; $S_n (1 - d) = d(1 - d^n)$; $S_n = \overbrace{d/(1 - d)}^{1/r} \cdot (1 - d^n)$;

$S_n = (1 - d^n)/r$ => $\mathbf{VA_0 = R + R(1 - d^n)/r}$ $\longrightarrow$ $a_{n\rceil\, r}$

17. *[DURATION DEL PORTAFOGLIO]*

Considerare una struttura per scadenza dei tassi di interesse costante e pari a i.
Un investitore ha investito il 30% del suo patrimonio in obbligazioni di duration D_1, il 50% del suo patrimonio in obbligazioni di duration D_2, il 20% del suo patrimonio in obbligazioni di duration D_3.
Fornire una stima approssimata del valore dell'investimento nel caso in cui:

(a) ***Il livello dei tassi i aumenti di 0.01***
(b) ***Il livello dei tassi i diminuisca di 0.005***

Risposta:

La duration del portafoglio risulta essere: $D_p = 0.3\ D_1 + 0.5\ D_2 + 0.2\ D_3$

Sia W' il nuovo valore del portafoglio in seguito ad una variazione dei tassi pari a Δ, quindi:

$$W' - W \approx D_p^m \cdot W \cdot \Delta \qquad \text{con } D_p^m = D_p / (1 + i)$$

$$\text{Ovvero } W' \approx W(1 - D_p^m \cdot \Delta)$$

(W/100) < 1; viceversa nel caso $\Delta = -0.5\%$ il valore dell'investimento aumenta di un fattore k' = 1 + D_p^m (W/200) > 1

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

18. [TEOREMA DEI 2 FONDI]
In un mercato con N titoli i portafogli A e B sono efficienti. I rendimenti di tali portafogli sono non correlati, con rendimenti attesi r_A e r_B, deviazioni standard σ_A e σ_B.
(a) Determinare il rendimento atteso $\bar{r}$ del portafoglio efficiente di minima varianza
(b) In tale mercato esiste un portafoglio efficiente con varianza dei rendimenti pari alla media tra le varianze dei rendimenti di A e di B?
In caso di risposta affermativa, calcolare il rendimento atteso.

Risposta:

(a) Per il teorema dei 2 fondi tutti i portafogli efficienti si ottengono combinando linearmente i portafogli A e B. Si tratta pertanto di minimizzare in α l'espressione $\sigma^2 \sigma_A^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_B^2$

La soluzione è data da $\bar{\alpha} = \sigma_B^2/(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)$ e perciò il rendimento atteso del portafoglio di minima varianza è uguale a:

$$\mathbf{\bar{r} = \sigma_B^2/(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)\, r_A + \sigma_B^2/(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)\, r_B = \bar{\alpha}\, r_A + \bar{\alpha}\, r_B}$$

(b) La varianza del portafoglio a varianza minima è pari a:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^2 \sigma_A^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_B^2 = [(\sigma_A^2\, \sigma_B^2)/(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)] \cdot (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)$$

Dato che $(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)/2 > \bar{\sigma}$ esiste un portafoglio efficiente con varianza dei rendimenti pari alla media tra le varianze dei rendimenti di A e di B.
Per un tale portafoglio deve valere $\alpha^2 \sigma_A^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_B^2 = (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)/2$ cioè
$\alpha^2 (\sigma_A^2 + \sigma_B^2) - 2\alpha\, \sigma_B^2 + \sigma_B^2 - (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)/2 = 0$ che è un'equazione di 2° grado in α le cui soluzioni sono:

$$\alpha_{1,2} = \{\sigma_B^2 \pm \sqrt{[\sigma_B^4 - (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)(\sigma_B^2 - (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)/2)]}\} / (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)$$

Il rendimento atteso massimo tra i due possibili valori di α si ottiene scegliendo quello che dà più peso al titolo con rendimento atteso maggiore, cioè in questo caso il titolo B, quindi si prenderà:

$$\alpha_2 = \{\sigma_B^2 - \sqrt{[\sigma_B^4 - (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)(\sigma_B^2 - (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)/2)]}\} / (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)$$

Il rendimento atteso del portafoglio è:

$$\mathbf{\bar{r} = \alpha_2\, r_A + (1 - \alpha_2)\, r_B}$$

19. [TEOREMA FONDAMENTALE DEL TIR]

Risposta:

Dato un flusso di cassa $(x_0,x_1,x_2,......,x_n)$ con $x_0 < 0$ e $x_k \geq 0$ per ogni k = 1, 2, …, n con almeno un termine strettamente positivo allora l'equazione

$x_0 + x_1 d + x_2 d^2 + \ldots + x_n d^n = 0$ ha un'unica soluzione positiva.

Inoltre se $x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k > 0$ (cioè l'importo totale restituito supera l'investimento iniziale) allora il

TIR corrispondente è positivo, perché $0 < d < 1$ e sappiamo che $r = 1/d - 1$

Se $x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k < 0$ allora il TIR sarà negativo perché $d^* > 1$ e $r^* = 1/d^* - 1 < 0$

20. [PROBLEMA DI MARKOWITZ]

Risposta:

Possiamo trovare le condizioni per una soluzione di questo problema utilizzando i *moltiplicatori di Lagrange* λ e μ associati ai vincoli. Seguirà la seguente *Lagrangiana:*

$$L(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \lambda, \mu) = \sum_{i,j=1}^{2} \omega_i\, \omega_j\, \sigma_{ij} - \lambda\Big(\sum_{i=1}^{2} \omega_i\, \bar{r}_i - \bar{r}\Big) - \mu\Big(\sum_{i=1}^{2} \omega_i - 1\Big) =$$

$$= \omega_1^2\, \sigma_1^2 + 2\, \omega_1\, \omega_2\, \sigma_1 + \omega_2^2\, \sigma_2^2 - \lambda(\omega_1\, \bar{r}_1 + \omega_2\, \bar{r}_2 - \bar{r}) - \mu(\omega_1 + \omega_2 - 1)$$

quindi:

$$d\,L / d\,\omega_1 = 2\, \omega_1\, \sigma_1^2 + 2\, \omega_2\, \sigma_{12} - \lambda\, \bar{r}_1 - \mu = 0$$

$$d\,L / d\,\omega_2 = 2\, \omega_2\, \sigma_2^2 + 2\, \omega_1\, \sigma_{12} - \lambda\, \bar{r}_2 - \mu = 0$$

che metteremo a sistema con i due vincoli:

$$d\,L / d\,\lambda = \omega_1\, \bar{r}_1 + \omega_2\, \bar{r}_2 - \bar{r}$$

$$d\,L / d\,\mu = \omega_1 + \omega_2 - 1$$

Notiamo come il caso con 2 titoli sia in realtà *degenere* perché le due incognite ω_1, ω_2 possono essere determinate unicamente dai due vincoli senza dover calcolare il valore dei moltiplicatori di Lagrange.

*PER n TITOLI
Per un portafoglio efficiente avente tasso di rendimento medio $\bar{r}$, gli n pesi ω_i per $i = 1, \ldots, n$ ed i due moltiplicatori di Lagrange λ e μ soddisfano

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\, \omega_j - \lambda\, \bar{r}_i - \mu = 0 \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

a sistema con
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \bar{r}_i = \bar{r} \\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \end{cases}$$

Abbiamo quindi le n equazioni e le due equazioni dei vincoli per un totale di $n + 2$ equazioni; corrispondentemente abbiamo $n + 2$ incognite, ovvero gli n valori di ω_i più λ e μ.
Risolvendo queste equazioni si ottengono i pesi di un portafoglio efficiente con media $\bar{r}$.

FORMULARIO

- ***Relazione tra duration e sensibiltà del prezzo***

$VA'_0(r) = -(1+r)^{-1} * D_0(r) * VA_0(r) \quad \Rightarrow \quad VA'_0(r) / VA_0(r) = D_0(r)/[-(1+r)] \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad D_0(r) = VA'_0(r)/ VA_0(r) * [-(1+r)]$

- ***Immunizzazione finanziaria***

$$\begin{cases} VA_{0\ (Passivi)} = VA_{0\ (Attivi)} \\ D_{0\ (Attivi)} = D_{0\ (Passivi)} \end{cases}$$

- ***Formula di rendita anticipata finita***

$a_{n\rceil\, r} = (1 - v^n)/r \quad \Rightarrow \quad a_{n\rceil\, r} = [1 - (1 + r)^{-n}]/r$

$\lim_{n\to\infty} [1 - (1 + r)^{-n}]/r \quad \Rightarrow \quad a_{\infty\rceil\, r} = 1/r \quad e \quad s = [(1 + r)^n - 1]/r$

tende a 0

- ***Formula di rendita perpetua***

(a) $V_0 = 1/r$ *(unitaria posticipata);* $V_0 = A/r$ *(rata annuale posticipata di valore "A")*

(b) $V_0^{(a)} = 1/r + 1$ *(unitaria anticipata);* $V_0^{(a)} = A/r + A$ *(rata annuale anticipata di valore "A")*

- ***Formula di Makeham***

$A(0; J) = K(0; J) + i/J[C - K(0; J)]$

Nuda proprietà: $K(0; J) = [J\,A(0; J) - i\,C]/(J - i)$

Usufrutto: $U(0; J) = [C - A(0; J)]/\,(J - i) \cdot i$

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it

- ***Formula di equivalenza dei tassi***

$r_e = (1+r/m)^m - 1$

$r = [(1+r_e)^{1/m} - 1] \cdot m$

- ***Isolamento di $f(i, j)$ dalla formula $d_{i,j} = 1/[1 + f(i, j)]^{j-1}$ (tasso forward)***

$[1 + f(i, j)]^{j-1} = 1/ d_{i,j}$

$1 + f(i, j) = 1/ (d_{i,j})^{[1/(j-i)]}$

$f(i, j) = 1/ (d_{i,j})^{[1/(j-i)]} - 1$

- ***Isolamento della numerosità n***

$(1 - d_m^n)/r_m = D/x$

$1 - d_m^n = D/x \cdot r_m$

$d_m^n - 1 = - r_m \cdot D/x$

$d_m^n = 1 - r_m \cdot D/x$

$ln(d_m)^n = ln(1 - r_m \cdot D/x)$

$n \cdot ln(d_m) = ln(1 - r_m \cdot D/x)$

$n = [ln(1 - r_m \cdot D/x)]/ ln(d_m)$

- ***Rendimento di un titolo rischioso***

Rendimento totale = R = Importo ricevuto/Importo investito = X_1/X_0

Tasso di rendimento = $r = (X_1 - X_0)/X_0$

Come si legano R ed r?

$r = (X_1 - X_0)/X_0 = X_1/X_0 - 1 = R - 1 \Rightarrow r = R - 1$ *ed allora anche* $R = r + 1$

- ***Vendita allo scoperto***

Possibilità di vendere un titolo che non si possiede, prendendolo in prestito da qualcuno che lo ha e rivendendolo ad altro soggetto, ricevendo così l'importo X_0.
Si restituisce quindi il prestito acquistando il titolo al prezzo X_1 *e rendendolo al prestatore*

Se $X_1 < X_0 \Rightarrow$ *profitto* $X_0 - X_1$*; vendita redditizia, il prezzo del titolo è sceso*

Se $X_1 > X_0 \Rightarrow$ *perdita* $X_1 - X_0$

Rendimento $R = X_1 / X_0$ *(da* $(-X_1)/(-X_0)$*)*

- ***Rendimento del portafoglio***

$C/V_0^i \cdot V_1^i = C\,R^i = C(1 + r^i)$

ω_i *è il peso del titolo i all'interno del portafoglio*

$\omega_i < 0$ *sto vendendo allo scoperto su i*

$\omega_i > 0$ *sto acquistando i*

In $t = 0 \quad V_0 = x_0$

$X_1/X_0 = \omega_1 \cdot R_1 + \omega_2 \cdot R_2 + \ldots + \omega_n \cdot R_n$

Totale $R = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i$; *Totale* $r = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i$

- ***Variabili aleatorie***

$Er_n = \bar{r}_n \qquad Var(r_k) = \sigma_{kk}$

$Var(x) = E(x - \bar{x})^2 = E(r_1^2) + \bar{r}_1^2$

$cov(r_1, r_2) = E(r_1 - \bar{r}_1)(r_2 - \bar{r}_2) = \sigma_{1,2}$

$\rho_{12} = \sigma_{12}/\sqrt{(\sigma_{11}\sigma_{22})}$ con $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$

- ***Matrice varianza-covarianza***

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sigma_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sigma_{ii} & \sigma_{ij} & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \sigma_{jj} & \ldots\ldots\ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Questa è la matrice *n*x*n* simmetrica poichè $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ed è *definita positiva* (cioè il $DET>0$ ed i determinanti principali sono >0) *se* $\underline{v}^T \Sigma v > 0$ *per ogni* $v \in R$

2x2.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} + \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} + \sigma_{yy} \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma_{xx} + \sigma_{xy} + \sigma_{yx} + \sigma_{yy} = \sigma_{xx} + 2\sigma_{xy} + \sigma_{yy}$$

3x3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} + \sigma_{xy} + \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} + \sigma_{yy} + \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} + \sigma_{zy} + \sigma_{zz} \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma_{xx} + \sigma_{xy} + \sigma_{xz} + \sigma_{yx} + \sigma_{yy} + \sigma_{yz} + \sigma_{zx} + \sigma_{zy} + \sigma_{zz} = \sigma_{xx} + 2\sigma_{xy} + 2\sigma_{xz} + 2\sigma_{yz} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

- ***Media e varianza di un portafoglio***

Media rendimento:

$$E(r) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \bar{r}_i$$ *(somma ponderata dei tassi di rendimento attesi)*

Varianza rendimento:

$$Var(r) = \sigma^2 = E(r - \bar{r})^2 = \underline{\omega}^T \Sigma \, \underline{\omega}$$

- ***Diversificazione***

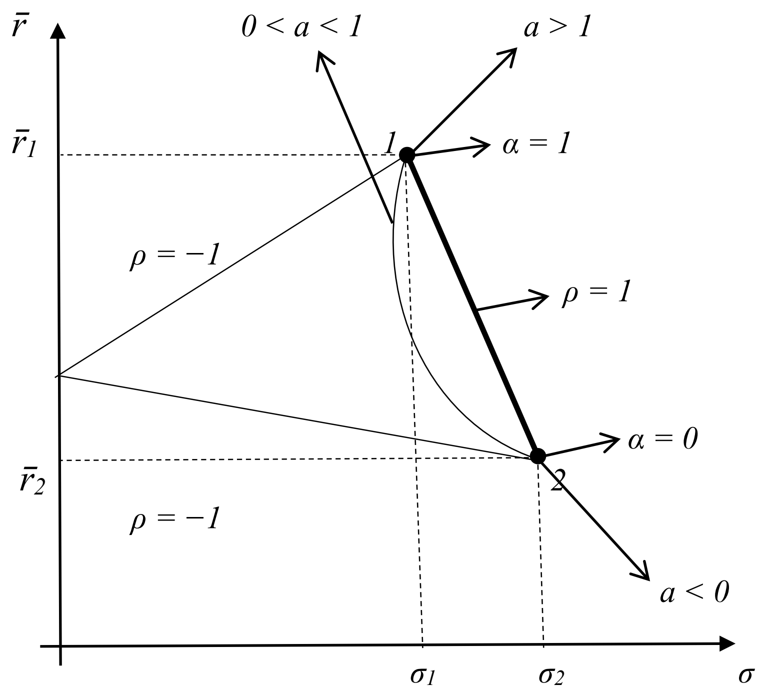
Investimento nel portafoglio di altri titoli (si riduce la varianza del rendimento)

Tasso di rendimento complessivo del portafoglio $= r = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i = \sum_{i=1}^{n} 1/n \cdot r_i = 1/n \sum_{i=1}^{n} r_i \Rightarrow$

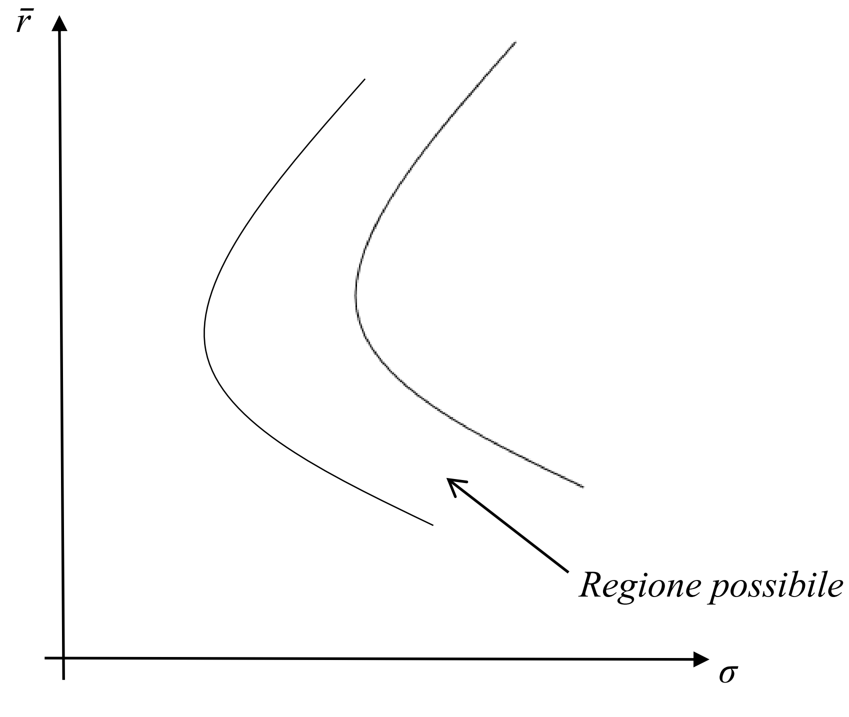
$$\Rightarrow \text{Valore atteso tasso di Rendimento} = \bar{r} = E(r) = 1/n \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i = 1/n \cdot n \cdot m = m \text{(valore atteso indipendente da } n\text{)}$$

$$\text{Varianza del tasso di} = 1/n \sum^{n} \sigma_i^2 = \sigma^2/n$$

- ***Diagramma di un portafoglio***



- ***Insieme possibile***



La regione possibile è l'insieme dei punti corrispondenti ai portafogli costituiti variando i coefficienti ω_i *in modo da realizzare tutte le combinazioni tali che* $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$

- ***Insieme di minima varianza***

Per ogni valore del tasso di rendimento medio, il punto possibile avente varianza minima è il corrispondente punto del bordo sinistro.
(Il punto a varianza minima è, appunto, il punto di minima varianza).

Gli individui "a sinistra" della regione possibile sono avversi al rischio.
Coloro che si sconstano dal punto di minima varianza sono propensi al rischio.

La frontiera efficiente è il punto che va dal punto di minima varianza alla parte superiore dell'insieme di minima varianza.

- ***Tasso di rendimento e rendimento atteso***

$r = \alpha\, r_1 + (1 - \alpha)\, r_2$

$E(r) = \alpha\, \bar{r}_1 + (1 - \alpha)\, \bar{r}_2$

$\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \bar{r} = \bar{r}_1$ $\qquad\qquad$ $\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \bar{r} = \bar{r}_2$

- ***Teorema dei due fondi***

E' possibile individuare due fondi (portafogli) efficienti tali che tutti i portafogli efficienti possano essere riprodotti, in termini di media e varianza, come loro combinazione.

La frontiera ammissibile o insieme di minima varianza gode di un'importante proprietà: i punti di questo insieme soddisfano il sistema di $n + 2$ *equazioni lineari:*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\, \omega_j - \lambda\, \bar{r}_i - \mu = 0 & i = 1, 2, \ldots, n \;\Rightarrow\; n \text{ equazioni} \\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i\, \bar{r}_i = \bar{r} & \\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 & \end{cases}$$

Supponiamo siano note due soluzioni $\omega_1 = (\omega_1^1, \omega_2^1, \ldots, \omega_n^1), \lambda^1, \mu^1$ *e*
$\omega_2 = (\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2), \lambda^2, \mu^2$ *con tassi di rendimento attesi* $\bar{r}_1$ *e* $\bar{r}_2$.
Forniamo una combinazione moltiplicando la prima per α *e la seconda per* $1 - \alpha$.
Per sostituzione diretta vediamo che tale somma è ancora soluzione delle $n + 2$ *equazioni e corrisponde al valore atteso* $\alpha\, \bar{r}^1 + (1 - \alpha)\, \bar{r}^2$.
Osserviamo infatti che $\alpha\, \underline{\omega}^1 + (1 - \alpha)\, \underline{\omega}^2$ *è un portafoglio leggittimo con pesi la cui somma è 1, quindi il vincolo* $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$ *è soddisfatto.*

Inoltre il rendimento atteso è $\alpha\, \bar{r}^1 + (1 - \alpha)\, \bar{r}^2$ *e quindi per tale anche il vincolo* $\sum_{i=1}^{n} \omega_i\, \bar{r}_i = \bar{r}$ *è soddisfatto.*
Infine poiché entrambe le soluzioni rendono uguale a zero il membro sinistro delle n *equazioni del sistema di Lagrange allora lo stesso vale per la loro combinazione ed anche*

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij}\, \omega_j - \lambda\, \bar{r}_i - \mu = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$ *sono soddisfatte.*

PREPARAZIONE ESAMI IN TEMPI RAPIDI per stare in corso con i migliori risultati.

Dott.re in Economia e Commercio laureato con il massimo dei voti a Tor Vergata con esperienza pluriennale eroga ripetizioni individuali e di gruppo in:

- MATEMATICA GENERALE
- MATEMATICA FINANZIARIA
- MICROECONOMIA
- MACROECONOMIA
- STATISTICA
- ECONOMIA POLITICA
- ECONOMIA AZIENDALE
- RAGIONERIA
- SCIENZE DELLE FINANZE
- GRUPPI AZIENDALI
- ANALISI FINANZIARIA
- POLITICA ECONOMICA

Conoscenza dei test, dei professori. Disponibilità di appunti, materiale didattico di supporto ed esercitazioni.
Preparazione personalizzata in base alle esigenze individuali per le università:

LUISS, LUMSA, CATTOLICA, UNIVERSITA' EUROPEA, ROMA3, SAPIENZA, TOR VERGATA, LINK CAMPUS, UNICUSANO

TUTORAGGIO TESI E APPLICAZIONE di un METODO INNOVATIVO

A partire da 10€ l'ora in gruppo. Per maggiori info contattarmi telefonicamente o via email.

3891543683-3206455028 alessio.leoncavallo@hotmail.it