MATEMATICA FINANZIARIA

A cura di © Francesco Fra

UNINFORMAZIONE

Matematica Finanziaria

La Matematica Finanziaria studia valori finanziari disponibili in istanti diversi, tenendo ferma la possibilità di scelta dell'individuo, infatti se non c'è scelta non c'è la necessità di applicazione di tale scienza.

Definizioni

I=interesse=differenza tra capitale a scadenza e capitale investito
M = montante = capitale alla fine della capitalizzazione
C = capitale investito

I=M-C

D = sconto = differenza tra il valore a scadenza e il valore ad un istante precedente
K = capitale a scadenza
P = valore attuale = valore ad un determinato istante di un valore disponibile in futuro D = K-P

r(t) = fattore di capitalizzazione, M/C
i(t) = tasso d'interesse, I/C v(t) = fattore di anticipazione, P/K d(t) = tasso di sconto, D/K

Capitalizzare: rinunciare a un capitale (C) in t per avere un montante (M) a scadenza
Attualizzare: rinunciare a un capitale (K) disponibile a scadenza per avere (P) anticipatamente

Relazioni tra grandezze

r(t)=1+i(t)
v(t)=1/r(t)=1/1+i(t)
d(t)=1-v(t)=1-1/r(t)=1/1+i(t)

la relazione tra v e r è tale per cui rv=1, infatti partendo dal periodo iniziali, se si capitalizzasse fino a t avendo utilizzato un capitale unitario (C=1), a scadenza si avrebbe r=1+i(t); e se,dopo di ciò, si volesse avere ,direttamente all'istante iniziale, il valore di quella somma futura, bisognerebbe attualizzarla, ma il capitale adesso sarebbe r(t)=1+i(t) e il valore adesso di una somma disponibile adesso è il valore stesso della somma, la quale era unitaria, quindi rv=1.

Regime dell'Interesse Semplice (RIS)

M=C+Cit

Nel regime dell'Interesse Semplice la relazione che intercorre tra C ed M è lineare. Gli interessi prodotti non generano a loro volta interessi, solo C è produttivo.

i(t) = it r(t)=1+it
v(t)=1/1+it d(t) = 1-v(t) = it/1+it
$i_{1/n}$ = i/n

Il fatto che la funzione che definisce r(t) sia lineare fa sì che il regime non sia scindibile, ovvero che fermarsi ad un istante s (0<s<t), riscuotere il montante accumulato e reinvestirlo allo stesso tasso d'interesse per il tempo rimanente (t-s) non permette di avere lo stesso montante che si avrebbe se si investisse da 0 a t senza interruzioni intermedie.

Infatti:
caso 1)

$$M_1 = 1 + is$$
$$M_2 = (1 + is)(1 + i(t - s)) = 1 + it + i^2 s(t - s)$$

caso 2)

$$M_3 = 1 + it$$

si nota, dunque, che

$$M_3 < M_2$$

essendo $s < t$

Capitalizzazione degli interessi, nel regime dell'Interesse Semplice

La capitalizzazione degli interessi permette di riscuotere gli interessi generati fino a quel momento e reinvestirli allo stesso tasso d'interesse, come visto in precedenza.
Se, nell'arco di tempo t, si decidesse di attuare questo processo a frazioni costanti di tempo (1/n), allora secondo la $i_{1/n}$ = i/n risulterebbe che, in quegli intervalli, si starebbe investendo a quel tasso d'interesse, frazione di quello unitario; la divisione temporale in porterebbe però a dover investire n volte prima di arrivare alla fine del periodo. Ovvero:

$$r(t) = (1 + it/n)\ (1 + it/n)\ (1 + it/n)..\ n\ volte = (1 + it/n)^n$$

ora considerando il caso in cui si voglia capitalizzare infinite volte

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} = e^{it}$$

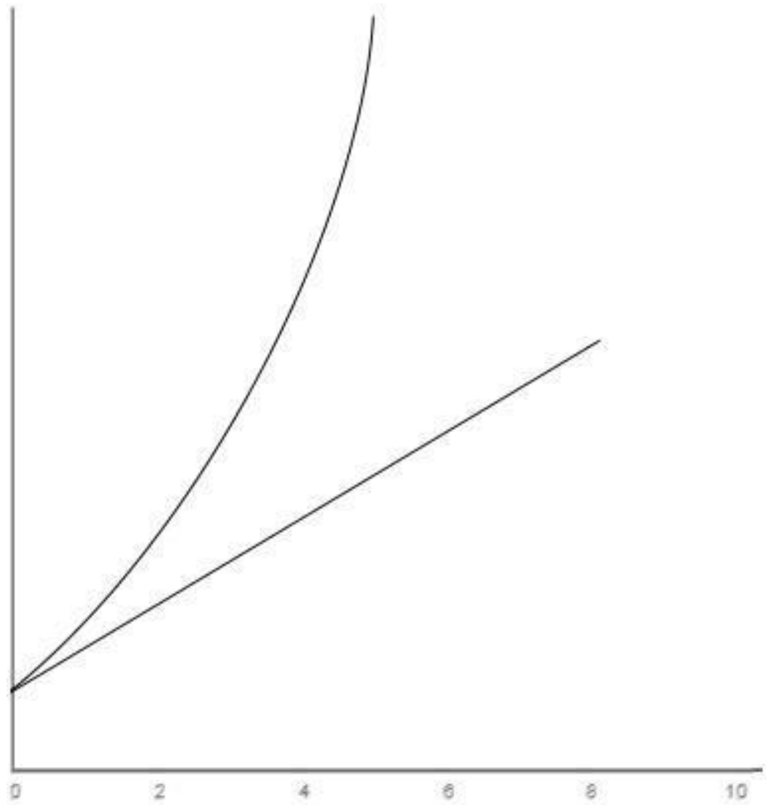
La semiretta rappresenta l'andamento del montante nel caso di interesse semplice non ricapitalizzato; l'esponenziale rappresenta la ricapitalizzazione.

Si può dimostrare che la semiretta del RIS è la *tangente a r(t)=*e^{it} nel punto t=0. Infatti:

$(e^{it})'=ie^{it}$ calcolata in 0 è uguale a i.
Quindi:

$$\begin{cases} r - r(0) = i(t-0) \\ r(0) = 1 \end{cases}$$

di conseguenza la retta tangente ha equivalenza r=it+1 ovvero la legge di capitalizzazione nel RIS.



In generale la Capitalizzazione intermedia degli interessi consente di ottenere un montante, all'istante finale, maggiore di quello che si otterrebbe se si adottasse il RIS ininterrottamente, per il fatto che anche gli interessi prodotti nei singoli intermezzi diventano produttivi di interessi. Graficamente lo si vede dal fatto che, tranne in t=0 dove gli interessi maturati sono nulli, il grafico esponenziale è sempre maggiore della retta del RIS.

Interessi posticipati e interessi anticipati

Quando si decide di mettere in atto un'operazione finanziaria in cui si prende un capitale a prestito col fine di investirlo si può avere la convenienza a pagare gli interessi *anticipatamente* o *posticipatamente*. Tale decisione modificherà direttamente l'importo del capitale e quindi della possibile redditività.
Il rapporto che intercorre tra i due tassi di interesse è definibile tramite la massima:

$$\text{"}L'interesse\ anticipato\ \grave{e}\ l'interesse\ (posticipato)\ \text{"}anticipato\text{""}$$
$$cit.\ Cacciafesta$$

$i_{anticipato} = v\ i_{posticipato}$ dove v rappresenta il fattore di anticipazione, in sostanza, dunque l'interesse anticipato rappresenta il valore di un interesse pagabile in t_n attualizzato in t_0; ovviamente, essendo v compreso tra 0 e 1 l'interesse anticipato sarà minore (al più uguale) dell'interesse posticipato, e ciò è logico, infatti prima si riscuote qualcosa, rispetto al tempo stabilito, minore sarà il valore in quell'istante.

Regime dell'Interesse Composto (RIC)

$M = C(1+i)^t$

Nel regime dell'interesse Composto la relazione che intercorre tra M e C è esponenziale. Gli interessi prodotti generano a loro volta prodotti.

$r(t) = (1+i)^t$ $i(t) = r(t)-1 =$
$(1+i)^t-1$ $v(t) = 1/(1+i)^t$ $d(t)$
$= 1- v(t) = 1- [1/(1+i)^t]$
$(1+i_{1/n})^n = (1+i)$

r(t) consente di calcolare il montante finale considerando però t∈ℕ, ovvero un numero naturale (es. 1;2;3;4..); mentre c'è la necessità di calcolare il valore di r anche per valori frazionari (razionali), come frazioni di anno ad esempio. Quindi:

$$\left(1 + i_{\frac{1}{n}}\right)^n = 1 + i => \left(1 + i_{\frac{1}{n}}\right) = (1 + i)^{1/n}$$

$$\left\{ r\left(\frac{m}{n}\right) = \left(1 + i_{\frac{1}{n}}\right)^m = (1 + i)^{m/n} \right.$$

Tramite questi passaggi matematici abbiamo messo in evidenza come sia possibile calcolare il valore di M in un t ∈ $\mathbb{Z}^+$, ovvero tutti i valori positivi esprimibili tramite frazioni (m/n).

Il Regime dell'interesse Composto consente, al contrario del RIS, di disinvestire ed investire per il tempo restante (0<s<t), con lo stesso regime finanziario, senza conseguenze sul valore del montante a scadenza.
Infatti:
Caso 1)

$$M_1 = (1 + i)^t$$

Caso 2)

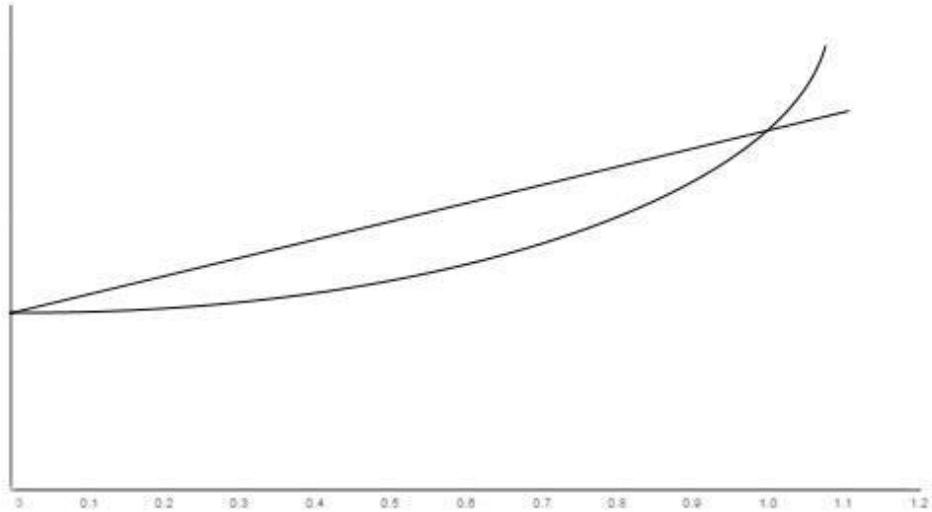
$$M_2 = (1 + i)^s$$

$$M3 = (1 + i)^s(1 + i)^{t-s} = (1 + i)^t$$

si nota dunque che

$$M_1 = M_3$$

Questo grafico definisce l'andamento temporale di due investimenti, uno secondo il regime dell'interesse semplice(la semiretta), l'altro per quello dell'interesse composto (l'esponenziale).



Come si evince dal grafico, le due funzioni di capitalizzazione si incontrano in due punti: all'inizio, dove ancora non si sono generati interessi, e, dopo, alla scadenza del primo periodo.
Non è dunque vero che il regime dell'interesse composto sia SEMPRE più conveniente rispetto al RIS, infatti per durate brevissime (minori del periodo unitario) il regime dell'interesse Semplice produce un montante maggiore; successivamente al superamento del primo periodo il regime dell'interesse Composto risulta più conveniente.

Tasso Nominale d'Interesse Equivalente

Spesso, considerando il caso del regime dell'interesse Composto, si ha la volontà di investire ma non quella di rinunciare per tutto l'arco dell'investimento ad una parte del capitale. In questa situazione il periodo dell'investimento viene frazionato in m parti, ed ogni m-esimo di periodo gli interessi vengono *staccati* e messi a disposizione dell'investitore. Tale manovra consente di avere disponibilità anche all'interno del periodo di riferimento ma porta l'operazione di investimento a ripartire, ogni m-esimo di periodo, dal capitale iniziale, perdendo così i frutti che si sarebbero ottenuti investendo anche gli interessi.

$j(m)$ rappresenta la somma degli interessi ottenuti ogni frazione di periodo

$$j(m) = m\, i_{\frac{1}{m}} = m[(1+i)^{1/m} - 1]$$

$$\left\{ (1 + i_{\frac{1}{m}})^m = 1 + i \right.$$

$j(m)$ è definito come Nominale in quanto confronta valori disponibili in istanti di tempo differenti (la somma degli interessi); è invece visto come Equivalente in quanto se ogni interesse staccato fosse reinvestito al *tasso di interesse i,* per il tempo rimanente alla fine del periodo, allora si otterrebbe l'interesse i.

Tale caratteristica è dimostrabile, infatti:

$$\sum_{t=\frac{1}{m}}^{1} i_{\frac{1}{m}}(1+i)^{1-t} = i_{\frac{1}{m}}(1+i)\sum_{t=\frac{1}{m}}^{1}(1+i)^{-t} = i_{\frac{1}{m}}(1+i)\sum_{t=\frac{1}{m}}^{1}\left[\frac{1}{(1+i)}\right]^{t}$$

$$per\ facilitare\ le\ cose\ imponiamo\ C = \left[\frac{1}{(1+i)}\right]^{t}$$

$$\left\{(1+i_{\frac{1}{m}})^{m} = 1+i\right.$$

dallo sviluppo della sommatoria nella prima equivalenza deriva:

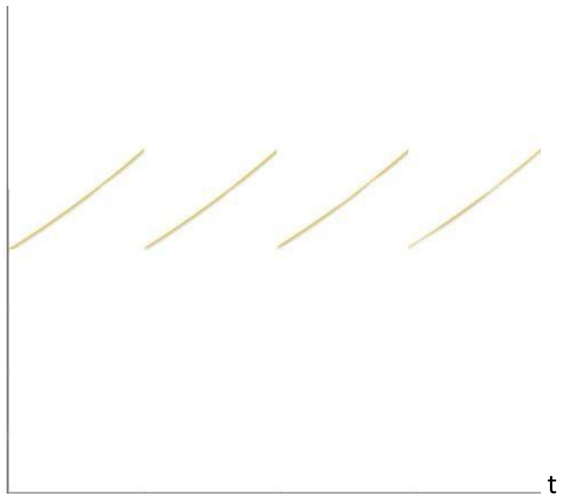
Serie di ragione $C_{\frac{1}{m}}$ $\sum_{t=\frac{1}{m}}^{1} C^{t} = C^{\frac{1}{m}}\frac{1-C^{1-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}}}{1-C^{\frac{1}{m}}}$ quindi $\sum_{t=\frac{1}{m}}^{1}\left[\frac{1}{(1+i)}\right]^{t} = \frac{1}{(1+i)^{1/m}}\frac{1-\frac{1}{(1+i)}}{[1-(1+i)^{-1/m}]}$

In conclusione

$$\sum_{t=\frac{1}{m}}^{1} i_{\frac{1}{m}}(1+i)^{1-t} = i_{\frac{1}{m}}(1+i)\frac{1}{(1+i)^{1/m}}\frac{1}{\left[1-(1+i)^{-1/m}\right]}\frac{i}{1+i} = i$$

Altra caratteristica della j(m) è il fatto che j(m)' sia negativa, ovvero j(m) sia decrescente, infatti j(m+1)<j(m), anche questo si vede matematicamente:

$$j(m)' = (1+i)^{1/m} - 1 - m\left[-\frac{1}{m^{2}}\log(1+i)\right] < 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$


t

Tasso Istantaneo (flusso continuo)

Riprendendo il caso precedente, del Tasso Nominale Equivalente, si può arrivare ad una estremizzazione di quella situazione ponendo il numero di frazioni del periodo tendente a infinito, arrivando così a creare non più una riscossione frazionata ma un flusso costante di investimento e disinvestimento di interessi.
La condizione estrema prevede dunque che m vada ad infinito per analizzare il valore del tasso d'interesse.

Dunque:

$$\lim_{m\to+\infty} j(m) = \lim_{m\to+\infty} m\, i^{\frac{1}{m}} = \lim_{m\to+\infty} m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right] = \infty(0) = forma\ indeterminata$$

ma j(m) può essere scritta anche come : $j(m)=\dfrac{\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right]}{1/m}$

quindi,

$$\lim_{m\to+\infty} j(m) = \lim_{m\to+\infty} \frac{\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]}{1/m} = \frac{0}{0} = forma\ indeterminata, ma\ si\ può\ applicare\ De\ l'Hopital$$

$$\lim_{m\to+\infty} j(m) = \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{1/m} \cdot \frac{1}{-1/m^2}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right] = -1/m^2 (1+i)^{\frac{1}{m}} \log(1+i) = \log(1+i) = \delta \Rightarrow r(t) = e^{\delta t}$$

$r(t) = e^{\delta t}$ rappresenta la legge di capitalizzazione nel caso dell'interesse composto, legge finanziaria applicata fino a questo momento, ed è stata ottenuta applicando le proprietà degli esponenziali, infatti:

$$e^{\log(1+i)} = e^{\delta} = 1 + i \Rightarrow (1+i)^t = e^{\delta t} = r(t)$$

Forza d'Interesse

Quando ci si trova nel bel mezzo di una capitalizzazione, quindi non più in t_0, diventa relativamente importante fare riferimento al capitale iniziale, in quanto ciò che interessa è la capacità di produrre interessi che si ha in quel determinato istante.
In sostanza si va a misurare la variazione che il montante riesce ad avere in una variazione di tempo (Δt).

$$M(t + \Delta t) - M(t)$$

$=$ $\overline{}$ $M(t)$ *crescita montante*

$$\frac{M(t+\Delta t)-M(t)}{(t)} = \frac{M(t+dt)-M(t)}{(t)}$$

$'interesse = \delta(t)$ lim$= forza$

d

$\Delta t \to 0^+$ M M

$$M(t) = Cr(t)$$

$$\lim M \_\_\_\_\_\_\_\_ (t+\Delta t) - M(t) = M(t+dt) - M(t) = M'(t)$$

$\{$ $\Delta t \to 0^+$ Δt dt

La prima equivalenza indica il tasso di crescita del montante, indicato prima come secondo una variazione di tempo Δt qualsiasi poi secondo una variazione di tempo infinitesimale dt.

$$\frac{M(t+dt)-M(t)}{M(t)} = incremento\ del\ montante \Rightarrow \delta(t) = \frac{M'(t)dt}{M(t)} \quad \frac{Cr'(t)dt}{Cr(t)} \quad \frac{r'(t)dt}{r(t)} = \quad =$$

$$\begin{cases} M(t+dt) - M(t) = M'(t)dt \\ M'(t) = Cr'(t) \end{cases}$$

Arrivati a questo punto bisogna notare che $\frac{r'(t)dt}{r(t)} = [\log r(t)]'$

Allora $\delta(t) = [\log r(t)]'$

$$\int_a^b [\log r(x)]'dx = \int_a^b \delta(x)dx$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = t \end{cases}$$

$$[\log r(x)]_0^t = \int_0^t \delta(x)dx \Rightarrow \log r(t) = \int_0^t \delta(x)dx$$

$$r(0) = 1 \Rightarrow \log r(0) = 0$$

Finalmente adesso utilizzando le proprietà degli esponenziali possiamo scrivere

$$e^{\log r(t)} = e^{\int_0^t \delta(x)dx} = r(t)$$

Valida per tutti i regimi di capitalizzazione.

Sia $r(t) = 1 + it$, ovvero RIS, si ha $\begin{cases} \delta(t) = [\log(1+it)]' = \frac{i}{1+it} \\ r(t) = e^{\int_0^t \delta(x)dx} = e^{\log(1+it)} = 1 + it \end{cases}$

Nel caso del RIC, invece $r(t) = (1+i)^t$ $\begin{cases} \delta(t) = [\log(1+\mathrm{i})^{\mathrm{t}}]' = [\mathrm{t}\log(1+\mathrm{i})]' \Rightarrow \log(1+\mathrm{i}) = \delta \\ r(t) = e^{\int_0^t \delta(x)dx} = e^{\delta t} \end{cases}$

Si nota che nel caso del RIC δ è una costante, infatti in questo caso la forza d'interesse coincide con il tasso d'interesse istantaneo già analizzato.

Rendite certe

È detta rendita una successione di capitali da pagare o da riscuotere ad istanti diversi.
Rate sono i singoli importi da pagare o riscuotere a scadenza.
Una rendita è dunque composta da capitali che assumo valore attuale o potenziale solo se considerati tutti allo stesso istante, se così non fosse non sarebbe possibile un confronto tra capitali in tempi diversi.
Può essere attualizzata o capitalizzata, tenendo però conto che i capitali possono assumere valore diverso anche in base al fatto che essi siano o meno anticipati o posticipati.

Valore attuale posticipato annuo, di una rendita unitaria in n anni

Definisce il valore che una rendita assume quando la prima rata è riscossa/pagata alla fine del primo periodo ed ha valore unitario; si provvede dunque ad attualizzare le rate rispetto all'istante iniziale. Ogni rata è dunque differita di un periodo, quindi all'istante iniziale non succede nulla dal punto di vista finanziario.

0 1 1 1 1 ... 1

t_0 → t_n

$$\sum_{x=1}^{n} v^x = v\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1}{1+i}\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{i}{1+i}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a_{n|i} = a\ posticipato, figurato\ n, al\ tasso\ i$$

La formula che abbiamo utilizzato è tale in quanto le rate sono unitarie, mentre si parte dal tempo x=1 dato che nel periodo iniziale, essendo la rata posticipata, non si ha nulla da attualizzare.

Il valore di $v\frac{1-v^n}{1-v} = a_{n|i}$ rappresenta il capitale necessario iniziale per pagare tutte le successive rate, o il capitale che si otterrebbe volendo riscuotere all'istante iniziale tutti i capitali futuri.

Valore attuale anticipato annuo, di una rendita unitaria in n anni

Definisce il valore che una rendita assume quando la prima rata è riscossa/pagata all'inizio del primo periodo ed ha valore unitario; si provvede dunque ad attualizzare le rate rispetto all'istante iniziale. Ogni rata è dunque anticipata di un periodo, quindi all'istante finale non succede nulla dal punto di vista finanziario.

1 1 1 1 1 ... 1 0

t_0 → t_{n-1} t_n

$$\sum_{x=0}^{n-1} v^x = \frac{1-v^n}{1-v} = ä_{ni}$$

è subito visibile la similitudine tra $ä_{ni}$ e a_{ni}. Infatti:

$$\begin{cases} \dfrac{1-v^n}{1-v} = ä_{ni} \\ \dfrac{1-v^n}{1-v}\, v = a_{ni} \end{cases} \Rightarrow ä_{ni} = \frac{a_{ni}}{v} = r\, a_{ni}$$

Montante posticipato annuo, di una rendita unitaria in n anni

Definisce il valore che una rendita assume quando l'ultima rata è riscossa/pagata alla fine dell'ultimo periodo ed ha valore unitario; si provvede dunque a capitalizzare le rate rispetto all'istante finale. Ogni rata è dunque differita di un periodo, quindi all'istante iniziale non succede nulla dal punto di vista finanziario.

0 1 1 1 1 ... 1

t_0 t_n

$$\sum_{x=0}^{n-1} r^x = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{(1+i)^n-1}{i} = s_{ni}$$

Per ricondurre tale risultato alla forma "base" contenente a_{ni}, allora

$$\begin{cases} \sum_{x=0}^{n-1} r^x = \dfrac{1-r^n}{1-r} = \dfrac{(1+i)^n-1}{i} = s_{ni} \\ \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a_{ni} \end{cases}$$

se si moltiplica e divide s_{ni} per $(1+i)^{-n}$ si ottiene

$$s_{ni} = [(1+i)^n - 1]\frac{(1+i)^{-n}}{(1+i)^{-n}\, i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = a_{ni}(1+i)^n$$

Montante anticipato annuo, di una rendita unitaria in n anni

Definisce il valore che una rendita assume quando l'ultima rata è riscossa/pagata all'inizio dell'ultimo periodo ed ha valore unitario; si provvede dunque a capitalizzare le rate rispetto all'istante finale. Ogni rata è dunque differita di un periodo, quindi all'istante finale non succede nulla dal punto di vista finanziario.

1 1 1 1 ... 1 0

t_0 t_{n-1} t_n

$$\sum_{x=1}^{n} r^x = r\frac{1-r^n}{1-r} = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \ddot{s}_{ni}$$

se si moltiplica e divide $\ddot{s}_{ni}$ per $(1+i)^{-n}$ si ottiene

$\ddot{s}_{ni} = (1+i)$ [(1 + $ii)^n -$ 1] ((11 ++

$ii))^{-}{}_{-n}{}^{n} = (1+i)\ 1i-\ (1(1++i)i-)_n{}^{-n} = (1+i)\ (1+ a_{ni} i)_{-n}\quad {}_{n+1} = a_{ni}(1+i)$

Rendite Frazionate

Le situazioni affrontate nei casi precedenti, di rendite annuali, possono essere viste anche nel caso in cui le rate delle rendite non siano riscuotibili/pagabili annualmente ma frazionatamente. A frazioni m-esime corrisponderanno dunque rate m-esime (frazioni della rata unitaria).

Valore attuale posticipato di n annualità m volte frazionate (nm frazioni)

Definisce il valore che una rendita assume quando la prima rata è riscossa/pagata alla fine del primo periodo ed ha $\frac{1}{m}$ valore ; si provvede dunque ad attualizzare le rate rispetto all'istante iniziale. Ogni rata è dunque differita di $1/m$ periodi, quindi all'istante iniziale non succede nulla dal punto di vista finanziario.

$$\sum_{x=\frac{1}{m}}^{n} \frac{1}{m} v_{\frac{1}{m}}^{mx} = \frac{1}{m} (v_{\frac{1}{m}})^{\frac{m}{m}} \frac{1-(v_{\frac{1}{m}})^{mn-1+1}}{1-(v_{\frac{1}{m}})^{\frac{m}{m}}} = a^{(m)}_{\overline{n}|i}$$

$$v_{\frac{1}{m}} = v^{\frac{1}{m}}$$

N.B. $(1+i_{\frac{1}{m}})^{m} = 1+i$ quindi

$$j(m) = m\, i_{\frac{1}{m}} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

$$\sum_{x=\frac{1}{m}}^{n} \frac{1}{m} v_{\frac{1}{m}}^{mx} = \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} \frac{1-v^{n}}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m} \frac{[1-(1+i)^{-n}]}{\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}\right]\left[1-\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}\right]} = \frac{[1-(1+i)^{-n}]}{m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right]} = \frac{[1-(1+i)^{-n}]}{j(m)}$$

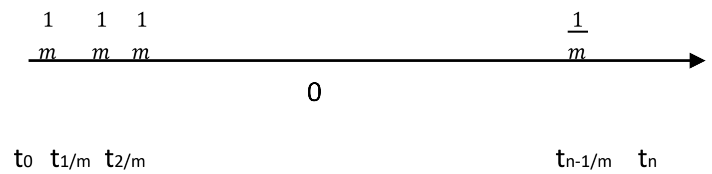
ora, per ricondurlo ad una formula ancora comprendente il caso base a_{ni}, moltiplicando e dividendo per i si ottiene,

$$\sum_{x=\frac{1}{m}}^{n} \frac{1}{m} v_{\frac{1}{m}}^{mx} = \frac{[1-(1+i)^{-n}]}{j(m)} \frac{i}{i} = \frac{i}{j(m)} a_{ni} = \frac{1}{\bar{i}^{(m)}} a_{ni}$$

Valore attuale anticipato di n annualità m volte frazionate (nm frazioni)

Definisce il valore che una rendita assume quando la prima rata è riscossa/pagata all'inizio del primo periodo ed ha valore $\frac{1}{m}$; si provvede dunque ad attualizzare le rate rispetto all'istante iniziale. Ogni rata è dunque anticipata di $1/m$ periodi, quindi all'istante finale non succede nulla dal punto di vista finanziario.

....



$$\sum_{x=0}^{n-\frac{1}{m}} \frac{1}{m} v_{\frac{1}{m}}^{mx} = \frac{1}{m} \frac{1-(v_{\frac{1}{m}})^{mn-1+1}}{1-v_{\frac{1}{m}}} = \frac{1-v^n}{m(1-v_{\frac{1}{m}})} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{m\,[1-(1+i)^{-\frac{1}{m}}]} = a_{ni}^{(m)}$$

per ricondurre la formula ad a_{ni}, si moltiplica e divide per $(1+i)^{\frac{1}{m}}$ ed i

$$\sum_{x=0}^{n-1} \frac{1}{m} v_{\frac{1}{m}}^{mx} = i(1+i)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{m(1+i)^{\frac{1}{m}}[1-(1+i)^{-\frac{1}{m}}]} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{i(1+i)^{\frac{1}{m}}}{j(m)} a_{ni} = \ddot{a}_{ni}^{(m)}$$

Montante posticipato di n annualità m volte frazionate (nm frazioni)

Definisce il valore che una rendita assume quando l'ultima rata è riscossa/pagata alla fine dell'ultimo periodo ed ha valore $\frac{1}{m}$; si provvede dunque a capitalizzare le rate rispetto all'istante finale. Ogni rata è dunque differita di $1/m$ periodi, quindi all'istante iniziale non succede nulla dal punto di vista finanziario.

0 $\quad \frac{1}{m} \quad \frac{1}{m} \quad \dots \quad \frac{1}{m}$

$t_0 \quad t_{1/m} \quad t_{2/m} \quad \dots \quad t_n$

$$\sum_{x=0}^{n-\frac{1}{m}} \frac{1}{m} r^{\frac{1}{m}xm} = \frac{1}{m}\,\frac{1-(r^{\frac{1}{m}})^{nm-1+1}}{1-r^{\frac{1}{m}}} = \frac{(r^{\frac{1}{m}})^{nm}-1}{j(m)} = \frac{r^{n}-1}{j(m)} = s_{n|i}^{(m)}$$

per ottenere il rapporto con $a_{n|i}$ si moltiplica e divide per i e per r^{-n}

$$\sum_{x=0}^{n-\frac{1}{m}} \frac{1}{m} r^{\frac{1}{m}xm} = \frac{1}{\frac{j(m)r^{-n}}{i}} \cdot \frac{(r^{-n})r^{n}-1}{i\,r^{n}} = \frac{i}{j(m)}\, a_{n|i} = s_{n|i}^{(m)}$$

Montante anticipato di n annualità m volte frazionate (nm frazioni)

Definisce il valore che una rendita assume quando l'ultima rata è riscossa/pagata all'inizio dell'ultimo periodo ed ha valore $\frac{1}{m}$; si provvede dunque a capitalizzare le rate rispetto all'istante finale. Ogni rata è dunque differita di $1/m$ periodi, quindi all'istante iniziale non succede nulla dal punto di vista finanziario.

$\frac{1}{m} \quad \frac{1}{m} \quad \dots \quad \frac{1}{m} \quad 0$

$t_0 \quad t_{1/m} \quad \dots \quad t_{n-1/m} \quad t_n$

$$\sum_{m} \frac{1}{m} r^{\frac{1}{m}xm} = \frac{r^{\frac{1}{m}}}{m}\,\frac{1-(r^{\frac{1}{m}})^{nm-1+1}}{1-r^{\frac{1}{m}}} = \frac{r^{\frac{1}{m}}(r^{n}-1)}{j(m)} = \ddot{s}_{n|i}^{(m)}$$

$x=\frac{1}{m}$

per ottenere il rapporto con a_{ni} si moltiplica e divide per i e per r^{-n}

$$\sum \frac{1}{m} \frac{1}{\frac{1}{m}} \quad \frac{r^m}{j(m)} \frac{i}{r^{-n}} \frac{r^{-n}(r^n-1)}{i} \quad \frac{1}{j(m)} \frac{r^{n+\frac{1}{m}}(1-r^{-n})}{i} r^{\frac{n}{xm}} = i\frac{r^{\frac{1}{m}}}{j(m)} a_{ni} = \ddot{s}_{ni}^{(m)} = i$$

$x=\frac{1}{m}$

Sono riportati i rapporti di grandezza esistenti tra i vari casi:

Valori Attuali $\ddot{a}_{ni} > \ddot{a}_{ni}^{(m)} > a_{ni}^{(m)} > a_{ni}$

Montanti $\ddot{s}_{ni} > \ddot{s}_{ni}^{(m)} > s_{ni}^{(m)} > s_{ni}$

ricordato che $\begin{cases} numero\ di\ frazioni = m > 1 \text{ va} \\ r = 1 + i > 1 \end{cases}$

Casi limite delle Rendite

Le situazioni estreme che si possono affrontare quando si ha a che fare con rendite, anticipate o posticipate, sono due; infiniti periodi o infinite frazioni.

Se $n \to +\infty$ allora si ha a che fare con $Rendite\ Perpetue$, in questo caso si riceve costantemente per infiniti periodi (teoria) il valore della rata:

n

$$\begin{cases}\lim_{n\to+\infty}\sum_{x=1} v^x = \lim_{n\to+\infty} v\,\dfrac{1-v^n}{1-v} = \dfrac{v}{1-v} = \dfrac{1}{i} = a_{\infty i} \\ 0 \le v \le 1\end{cases}$$

se si investe $a_{\infty i}$ al tasso d'interesse i il periodo successivo si avrà $\frac{1}{i}(1+i) = 1 + \frac{1}{i}$; staccando la rata unitaria si ritorna al punto di partenza, ovvero $\frac{1}{i}$, tale situazione può andare avanti all'infinito.

$$\begin{cases}\lim_{n\to+\infty}\sum_{x=0}^{n-1} r^x = \lim_{n\to+\infty}\dfrac{r^n-1}{r-1} = +\infty \quad divergente \\ r \ge 1\end{cases}$$

se si investe un qualsiasi capitale, anche piccolissimo, esso tenderà ad infinito dopo infiniti periodi.

Se $m \to +\infty$ allora si ha a che fare con $Rendite\ Continue$, si genera dunque un flusso continuo di rate:

$$\begin{cases}\lim_{m\to+\infty}\sum_{x=1}^{nm}\frac{1}{m} v^{\frac{x}{m}} = \lim_{m\to+\infty} a_{ni}^{(m)} = \lim_{m\to+\infty}\frac{i}{j^{(m)}}\, a_{ni} = \frac{i}{\delta}\, a_{ni} = \bar{a}_{ni} \\ \lim_{m\to+\infty} j(m) = \delta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim_{m\to+\infty}\sum_{x=0}^{nm-1}\frac{1}{m} r^{\frac{x}{m}} = \lim_{m\to+\infty}\frac{r^n-1}{m\left(r^{\frac{1}{m}}-1\right)} = \frac{i}{j^{(m)}}\, s_{ni} = \frac{i}{\delta}\, s_{ni} = \bar{s}_{ni} \\ \lim_{m\to+\infty} j(m) = \delta\end{cases}$$

va ricordato che $\delta < i$, quindi $\frac{i}{\delta} > 1 \Rightarrow \bar{a}_{ni} > a_{ni}$; $\bar{s}_{ni} > s_{ni}$

Valori Attuali $\ddot{a}_{ni} > \ddot{a}_{ni}^{(m)} > \bar{a}_{ni} > a_{ni}^{(m)} > a_{ni}$

Montanti $\ddot{s}_{ni} > \ddot{s}_{ni}^{(m)} > s_{n\bar{i}} > s_{ni}^{(m)} > s_{ni}$

Ammortamento Prestiti

L'ammortamento dei prestiti rappresenta la divisione in rate, costanti o meno, composte da una quota capitale C_t e da una quota interessi I, pagata sul debito residuo $C^{(t)}$.

Il piano d'ammortamento definisce le annualità dovute e la loro composizione in termini di interessi e quota capitale, avendo a disposizione un periodo n e un tasso d'interesse i.

Anno	Quota capitale	Quota interessi	Annualità	Debito Residuo

Tutte le componenti del piano d'ammortamento sono dipendenti dalla tipologia di ammortamento scelta, pur tenendo fermo il fatto di applicare il regime dell'interesse Composto.

N.B. Un caso estremo di ammortamento è, ed è stato già visto seppur non sotto questo punto di vista, quello in cui il capitale sia restituito tutto a scadenza e senza pagamenti di quote interessi per la durata del prestito; il piano d'ammortamento sarà vuoto in tutte le caselle esclusa quella del debito residuo, che fino al tempo n-1 rimarrà invariato, e quelle dell'ultimo periodo, in cui verrà corrisposto l'intero ammontare della quota capitale e la quota interessi capitalizzata per n annualità.

In ogni caso:

$$C^{(n)} = 0 \quad debito\ residuo\ finale$$

$$0 < t < n \qquad \{C^{(t)} = \sum_{h=t+1}^{n} C_h \quad debito\ residuo\ al\ tempo\ t$$

Ammortamento all'Italiana

Questo tipo di ammortamento prevede che la parte del debitore corrisponda per n annualità l'n-esima frazione del capitale concessogli in prestito, ovvero:

$$C_t = \frac{A}{n}$$

$$1 < t < n \qquad I(t) = A\left(1 - \frac{t-1}{n}\right) i$$

$$\{C^{(t)} = A - tC_t = A(n - n\,t)$$

Anno	Quota capitale	Interessi	Annualità	Residuo
0	0	0	0	A
1	A/n	Ai	A(i+1/n)	A(1-1/n)
2	A/n	Ai(1-1/n)	(A/n)+ Ai(1-1/n)	A(1-2/n)
...				..
n	A/n	Ai/n	A(1+i)/n	0

Ammortamento alla Francese

Questo tipo di ammortamento prevede la presenza di annualità costanti, ovvero la somma tra la quota capitale e quota interessi deve essere sempre uguale ad R.
Dunque, riprendendo la teoria delle rendite:

$$in\ t = 0 \quad A = R\sum_{x=1}^{n} v^x = R\, a_{ni}$$

Anno	Quota capitale	Interessi	Annualità	Residuo
0	0	0	0	A
1	Rv_n	$R(1-v^n)$	R	$A- Rv^n$
2	Rv_{n-1}	$R(1-v^{n-1})$	R	$A- R(v^n+v^{n-1})$
...				..
n	Rv	R(1-v)	R	0

si noti che l'andamento della quota interessi è decrescente mentre, al contrario, la quota capitale ha un andamento crescente; tale differenza deriva dal fatto che ognuno è complementare a R dell'altro.
La Quota capitale cresce, al passare del tempo, in quanto più ci si avvicina alla scadenza del periodo il valore attuale del prestito aumenta.

Determinazione piano d'ammortamento:

$$I(1) = Ai = iR\sum_{x=1}^{n} v^x = i\,R\,v\,\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{i}{i}R(1-v^n) = R(1-v^n)$$

$$\begin{cases} C_1 = R - R(1-v^n) = Rv^n \\ C(1) = R\,a_{ni} - Rv^n = R\,a_{n-1\,i} \end{cases}$$

Analizziamo ora il perché $C_t\ e\ I$ sembrano avere un andamento tanto ordinato.
Partendo, ancora, dal periodo t=1 si arriva al risultato della prima equivalenza nel sistema, la quale, a sua volta definisce la quota capitale; ora arrivati a questo punto si nota che il capitale residuo è

$$residuo = R\sum_{x=1}^{n} v^x - Rv^n = R\sum_{x=1}^{n-1} v^x = R\,a_{n-1\,i} = R\,\frac{1-v^{n-1}}{i}$$

Su questo capitale residuo, però, si dovrà andare a calcolare l'interesse dovuto nel periodo successivo

$$interesse_2 = iR\,\frac{1-v_{n-1}}{i} = R(1-v_{n-1})$$

Come è evidente, il tasso d'interesse sparisce anche in questo caso, generando la reazione a catena che permette di generalizzare come

$$C_{(t)} = A - R\sum_{x=1}^{t} v^{n-x} = R\left(a_{ni} - v^{n}\frac{1-v^{-t}}{1-r}\right) = R\left(\frac{1-v^{n-t}}{i}\right)$$

$$1 < t < n \qquad = iR\left(\frac{1-v^{n-t+1}}{i}\right) = R(1-v^{n-t+1})$$

$$I$$

$$C_t = R - R(1-v_{n-t+1}) = R(v_{n-t+1})$$

Ammortamento all'Americana

Questa tipologia di ammortamento si distingue rispetto alle altre per il fatto che il creditore riceve, ogni frazione di durata del prestito, solo il pagamento degli interessi sul debito, il quale, invece rimane invariato fino alla scadenza; per quanto riguarda il creditore, ha come annualità non solo la parte degli interessi dovuti ma anche una quota Q, che viene investita per tutta la durata del prestito con l'obiettivo di generare la quota capitale alla fine della durata. Il tasso d'interesse al quale viene investita Q è j ed è detto tasso di *valutazione*, e non dipende in alcun modo da i (tasso al quale sono calcolati gli interessi) ma è soggettivo rispetto al contraente del prestito.

Anno	Accumulazione	Interessi	Annualità	Residuo
0	0	0	0	A
1	Q	Ai	Q+Ai	A
2	Q	Ai	Q+Ai	A
...				
n	Q	Ai	Q+Ai	0

$$AQ\frac{-1}{js_{nj}} = Qs_{nj} \Rightarrow Q = \sum_{x=0}^{n} \overset{x}{=} Q(1+j) = Q\frac{1-(1+j)^{n}}{1-1-j} = \frac{(1+j)^n-1}{j}A$$

Viene a crearsi ora il problema del quale piano d'ammortamento sia più conveniente tra quello francese e quello americano; infatti, come conseguenza dell'equivalenza mostrata precedentemente, anche in questo tipo di ammortamento l'annualità è costante:

$$R = s_{nj}\, A + Ai$$

$$caso\ Francese\ R = \frac{A}{a_{ni}} = A\frac{i}{1-v_n}$$

$$caso\ Americano\ R = \left(\frac{1}{s_{nj}} + i\right) A = A\left(\frac{j}{(1+j)^n - 1} + i\right)$$

Il piano d'ammortamento migliore è quello che fa ottenere l'annualità più bassa, e dunque dipende da i e da j.

$$\left\{ \frac{i}{} \quad \frac{(1+j)^n - 1}{} \right.$$

$$\frac{}{1-v} \qquad \underline{\qquad\qquad}^{n} = j + i$$

$$\frac{i - i + iv^n}{1 - v^n} = \frac{j}{(1+j)^n - 1} \Rightarrow \frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{j}{(1+j)^n - 1}$$

$\{\ i\underline{\qquad\qquad}\ \underline{\qquad\qquad}\ \underline{\qquad\qquad} -1i{-}{+}vi^n v_n = (1i{-}v^n v/^n v)_n / v_n = (1 + ii)_n - 1$

$$\frac{i}{\qquad}{}^{n} - 1 = \frac{j}{(1+j)^n - 1}\ (1 + i)$$

Da questa equivalenza si evince il fatto che se j ed i sono uguali, allora non ci sarà alcuna differenza tra lo scegliere l'uno rispetto all'altro.
Se j>i ⇨ ammortamento all'Americana.
Se i>j ⇨ ammortamento alla Francese.

Ammortamento Tedesco

In questo caso non si tratta di una tipologia particolare di ammortamento, ad esempio pagamento degli interessi a scadenza o restituzione in annualità costanti, bensì si ha a che fare con una situazione in cui gli interessi vengono riscossi anticipatamente.

$$i_{anticipato} = \frac{i}{1+i}$$

es. ammortamento all'Italiana

Anno	Quota capitale	Interessi	Annualità	Residuo
0	0	Ai/(1+i)	Ai/(1+i)	A
1	A/n	A(1-1/n) [i/(1+i)]	...	A(1-1/n)
...				
n	A/n	0	A/n	0

Bisogna notare che, oltre al caso specifico dell'esempio, l'ammortamento Tedesco fa sì che la cifra reale concessa al contraente non sia A, ma $A - A\frac{i}{1+i}$, ovvero la cifra al netto degli interessi da pagare immediatamente; dal punto di vista delle annualità si genera un'equivalenza tra il caso Tedesco e quello in cui si debba pagare il tasso d'interesse posticipato ad un capitale concesso pari a $A - A\frac{i}{1+i}$.

Valutazione Prestiti

Riprendendo quanto introdotto in precedenza, mentre si analizzava l'ammortamento all'Americana, non sempre un prestito ha lo stesso valore per chi lo contrae e per chi lo concede, ma anzi questa situazione trova riscontro solo quando i (tasso al quale è concesso il prestito) e j (tasso di valutazione) coincidono.

Per *valutazione* si intende il *valore attuale* di una certa somma in un certo istante t, considerando solo le annualità ancora da pagare/riscuotere.

$$A(t;j) = \sum_{x=t+1}^{n} Q_h v_j^{x-t} = \sum_{x=t+1}^{n} Q_h (1+j)^{t-x} = \sum_{x=t+1}^{n} Q_h e^{\delta(t-x)} = A(t;\delta)$$

$$\{ \log(1+j) = \delta$$

Sostanzialmente il tasso j indica, dal punto di vista del debitore, la sua capacità di far rendere il prestito concessogli, quindi, più la sua capacità di farlo fruttare sarà alta, più il valore attuale del prestito sarà basso.
Il tasso j è un tasso soggettivo e il suo valore non è né connesso né influenza l'andamento delle annualità (determinate dal tasso i).

$$i \neq j \quad \begin{cases} A(0;i) = \sum_{x=1}^{n} Q_h v^x = A \\ A(0;j) = \sum_{x=1}^{n} Q_h v_j^x \neq A \end{cases}$$

Ora, dato che il prestito può essere concesso seguendo ogni piano d'ammortamento, è utile andare a mettere in evidenza la Durata Media Finanziaria, ovvero scadenza media dei pagamenti pesati per il loro valore attuale.

$$dmf = \frac{\sum_{x=t+1}^{n} (x-t) Q_h e^{\delta(t-x)}}{\sum_{x=t+1}^{n} Q_h e^{\delta(t-x)}} = \frac{\sum_{x=t+1}^{n} (x-t) Q_h e^{\delta(t-x)}}{A(t;\delta)} =$$

La dmf diminuisce all'aumentare di δ.
N.B. facendo l'analisi delle dimensioni di ogni valore si perviene al fatto che dmf è effettivamente una durata; si ricorda, inoltre, che il tempo di pagamento delle annualità *(x)* non è obbligatoriamente costante, così come non è obbligatoriamente costante la somma del pagamento delle annualità *(Q_h)*.

Si va ora a misurare la Sensibilità del valore attuale al tasso d'interesse j (*di seguito si farà riferimento a δ data la relazione che li lega* $1 + j = e^{\delta}$), ovvero quanto cambia il valore attuale in t a seguito di una cambiamento di j.

$$sensibilità = \frac{A(t;\delta + d\delta) - A(t;\delta)}{A(t;\delta)} \quad \frac{A'(t;\delta)d\delta}{A(t;\delta)} =$$

$$\{ A(t;\delta \quad \underline{\qquad\qquad} \quad + d\delta d\delta) - A(t;\delta) \quad '(t;\delta) = A$$

Dunque,

$$A'(t;\delta) = [A(t;\delta)]' = \left[\sum_{x=t+1}^{n} Q_h e^{\delta(t-x)}\right]' = \sum_{x=t+1}^{n} (t-x) Q_h e^{\delta(t-x)}$$

E quindi,

$$sensibilità = \frac{d\delta \sum_{x=t+1}^{n} (t-x) Q_h e^{\delta(t-x)}}{A(t;\delta)} = -dmf\ d\delta$$

Dall'ultima equivalenza si evince che un investimento sarà tanto più sensibile quanto maggiore è la sua durata media finanziaria.

Immunizzazione

Quando si ha la necessità di avere, in un istante t, la cifra C, non sempre possono essere disponibili, nell'istante in cui si fa la valutazione, operazioni della durata t_0-t (dove t_0 è il periodo iniziale); è invece probabile che le operazioni disponibili si distribuiscano, prima o dopo, il periodo t desiderato.

Si definisce ***tsc(t)***, titolo senza cedole, lo strumento che consente di avere 1 al tempo t, non sono previ sti, essendo appunto senza cedole, pagamenti intermedi degli interessi; il suo valore nel momento in cui lo si acquista/vende è pari, come di consueto, al suo valore attuale calcolato secondo il tasso di ren- dimento del titolo stesso.

Si ha dunque a che fare con un portafoglio composto da vari tsc aggregati con l'obiettivo iniziale di avere, al tempo t la cifra C; il portafoglio va dunque *immunizzato*, ovvero va composto in maniera tale che, qualsiasi variazione del tasso di rendimento del mercato possa al minimo far ottenere la cifra desiderata.
La durata media finanziaria dell'operazione in portafoglio deve essere uguale alla durata dell'operazione necessitata, e, allo stesso tempo, il valore attuale deve essere lo stesso.

$$t \qquad \frac{\sum_{x=t_1}^{t_n}(x-t_0)n_x e^{-\delta(x-t_0)}}{\sum_{x=\ 1}^{t_n} n\ \ e^{-\delta(x-t_0)}} = \qquad t \qquad x$$

$$immunizzazione \ _{tn}$$

$$\Bigg\lfloor\sum_{x=t_1} n_x e \qquad \Big\{ \qquad {}^{-\delta(x-t_0)} = Ce^{-\delta(t-t_0)}$$

Se le operazioni presenti nel portafoglio non sono più di 2 questo sistema ammette una sola soluzione (coppia di n_1 n_2).

t0 t1 t t2

L'immunizzazione, come detto, consente di smettere di osservare le oscillazioni del tasso di rendimento del mercato, ma porta di fronte a varie prospettive.

1) il tasso non cambia mai: portafoglio immunizzato per tutta la durata t.

2) il tasso cambia più volte prima di t_1 : in questo caso il portafoglio rimane immunizzato rispetto alla prima immunizzazione, non alle successive; in sostanza non si può mai avere in t una cifra minore di C, al massimo la si avrà minore di quanto si era arrivato ad avere (potenzialmente) con un cambiamento intermedio del tasso d'interesse.

3) il tasso cambia dopo t_1 : in questo caso il portafoglio non è più immunizzato, in quanto sarà presente una componente liquida (il tsc riscosso in t1 appunto) non più reinvestibile allo stesso tasso d'interesse; le componenti liquide vanno ad aumentare il valore attuale del portafoglio ma non ne influenzano le future riscossioni

(aumentano solo il denominatore, quindi diminuiscono la dmf). Il portafoglio dovrà essere immunizzato nuovamente.

Tassi a pronti - Tassi a termine

Un'operazione di durata annuale ($t \rightarrow t+1$) e un'operazione di durata n anni ($t \rightarrow t+n$), nel caso, ad esempio, del regime dell'interesse composto, dovrebbero arrivare, alla fine della durata, rispettivamente a

$$r(t\,,t+1) = (1+i(t,t+1))$$
$$\{r(t,t+n) = (1+i(t,t+n))_n \rightarrow i(t,t+1) = i(t,t+n)$$

dove la differenza tra i due montanti risiede esclusivamente nella durata stessa dell'operazione. (i valori nelle parentesi indicano il valore dell'interesse annuo riferito a quel periodo)

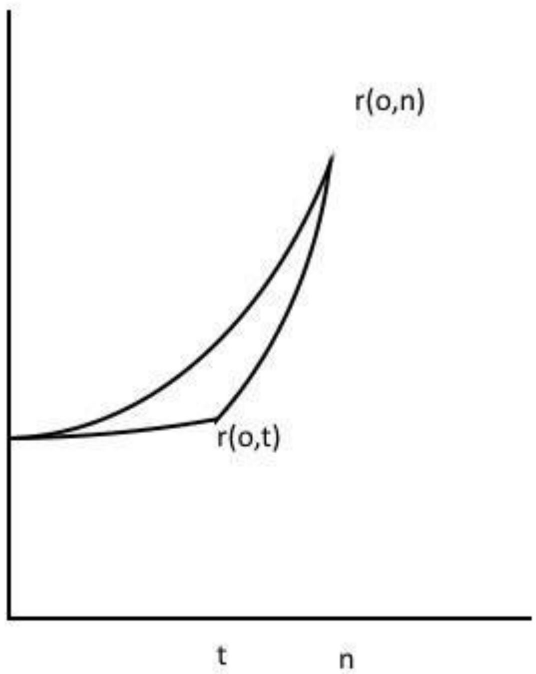
Esistono, invece, sul mercato operazioni finanziarie di diversa durata, le quali presentano tassi di rendimento interno diverso tra loro.

Ponendo, per esemplificare, che al tempo t_0, siano disponibili sul mercato due tsc, ovvero tsc(t) e tsc(n) (dove $z > t$).

Se $i(0,t) < i(0,n)$

allora se si calcola il montante, nello stesso momento ($\leq t$; in t, per esempio), di tsc(t) e tsc(n)

$$(1+i(0,t))^t < (1+i(0,n))^t$$



i(o,t) e i(o,n) prendono il nome di *tassi a pronti*, ovvero quei tassi disponibili sul mercato per acquistare immediatamente qualcosa sul mercato ed averla subito (indipendentemente dalla sua durata).
Ma per un operatore, all'istante iniziale, dovrebbe essere indifferente investire in un'operazione continua o in due spezzate ma conseguenti (se il regime è composto), e questo per la regola della scindibilità.

Dunque, la seconda spezzata di parabola presente nel grafico, rappresenta il tasso che, al tempo 0 si pensa che il mercato avrà dal tempo per investimenti con partenza da t e conclusione in n; si sta parlando dei *tassi a termine*.

Come detto, per la regola della scindibilità, deve essere:

$$r(0,t)r(t,n) = r(0,n)$$

quindi

$$\begin{cases} r(t,n) = \dfrac{r(0,n)}{r(0,t)} = \dfrac{[1+i(0,n)]^n}{[1+i(0,t)]^t} \\ r(t,n) = [1+i_{termine}(t,n)]^{n-t} \end{cases}$$

infine

$$i_{termine}(t,n) = \left(\frac{[1+i(0,n)]^n}{[1+i(0,t)]^t}\right)^{\frac{1}{n-t}} - 1$$

Questa condizione, afferma che i tassi di interesse a termini sono definiti dalla struttura dei tassi d'interesse a pronti. Si tratta di una condizione non assumibile con certezza (il futuro è incerto per definizione), ma necessaria affinché non sia possibile mettere in pratica arbitraggi.

Criteri di Valutazione di Operazioni Finanziarie

Se si hanno a disposizione due o più operazioni finanziarie è utile essere in grado di calcolare quale risulta la più "conveniente".

Criterio del REA

Il criterio del REA (ovvero, Risultato Economico Attualizzato) ha come caratteristica quella di attualizzare tutte le variazioni finanziarie che si prevede di avere, con l'obiettivo di confrontare tutti i valori attuali.
Le variazioni finanziarie possono essere:
-finanziamento, tutte le entrate anticipano tutte le uscite; -
investimento, tutte le uscite anticipano tutte le entrate; -non
definito, residuale rispetto alle precedenti due.

Due (o più) operazioni, per essere confrontabili, devono avere dei requisiti di similitudine sia dal punto di vista della durata sia da quello della quantità.
Appare, infatti, inopportuno e non utile andare a confrontare flussi ottenuti mediante, per esempio, confrontare operazioni che generano flussi di casa decennali con operazioni scadenti in 1 anno, o il V.A. di un investimento uguale a 1 con uno di 100; le informazioni ricavate applicando il criterio del REA in questi casi sarebbero potenzialmente fuorvianti.

$$\boldsymbol{A(t,j) = \sum_{x=t}^{n} C_x(1+j)^{t-x}}$$

Per mettere in pratica tale criterio è dunque necessario definire in partenza il proprio tasso j di valutazione, considerandolo costante per tutta la durata ed essere a conoscenza delle future variazioni finanziarie; proprio queste due caratteristiche sono alla base della critica verso questo criterio, infatti considerare un tasso costante di valutazione è di per sé improbabile come, altrettanto improbabile, spesso, è essere a conoscenza di tutti i futuri flussi di cassa ai quali si farà fronte.
Inoltre il criterio del REA è un criterio lontano dall'essere *oggettivo*, la citata dipendenza dal tasso di valutazione (soggettivo per definizione) fa sì che la stessa operazione, rispetto a due soggetti diversi, può essere giudicata con due esiti diversi, rimanendo il giudizio perfettamente razionale e coerente con le aspettative dei singoli.

Criterio del TIR

Il criterio del TIR (ovvero, Tasso Interno di Rendimento) permette di valutare e confrontare una serie di flussi di casa mediante l'individuazione del loro tasso di rendimento.

$$REA = 0 = A(t,i) = \sum_{x=t}^{n} C_x(1+i)^{t-x}$$

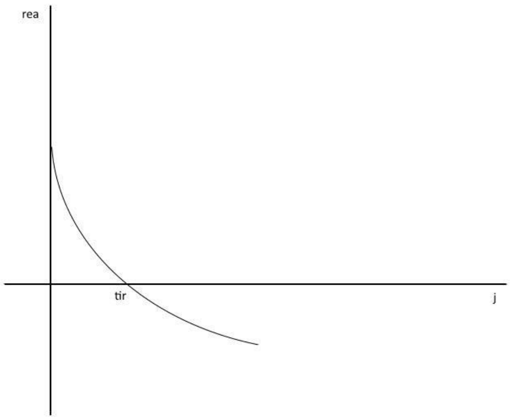
dove i è l'oggetto da identificare mediante la conoscenza delle C (variazioni, positive o negative, di cassa).

Questo criterio individua dunque il tasso interno, e quindi *oggettivo,* delle operazioni in questione.
Bisogna comunque notare che le operazioni possono essere sia operazioni in cui il "nostro" capitale rende al tasso d'interesse i, e quindi si parla effettivamente di tasso di rendimento, o, al contrario, operazioni in cui il capitale in questione è di altri e, quindi, rappresenta per noi un costo definito dal tasso i, ora, appunto tasso di costo: tale informazione, a priori, non è fornita dall'applicazione del criterio del TIR.

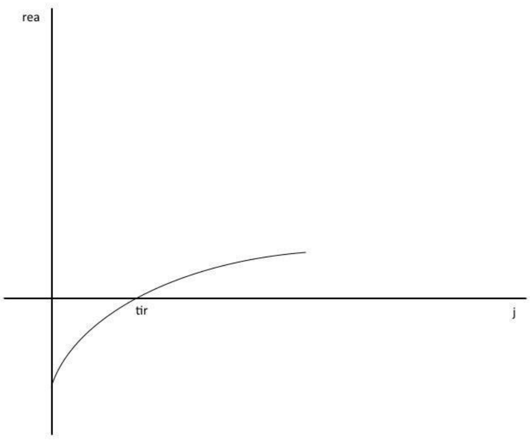
Inoltre il TIR non è sempre individuabile, dato che, se non i casi di *investimenti* e *finanziamenti*, è possibile avere a che fare con operazioni che presentano più di una variazione di segno nei flussi di cassa (entrate ed uscite alternate), e quindi, secondo la Regola dei segni di Cartesio, i "tassi d'interesse" che rendono possibili tali operazioni possono essere più di uno.

Regola dei segni di Cartesio
"Il numero delle variazioni di segno è il massimo numero di radici positive di un polinomio a coefficienti reali. Il numero effettivo di radici positive è pari al massimo oppure al massimo diminuito di un numero pari."

Emergono, dunque, discordanze sia di carattere applicativo sia di carattere interpretativo tra i due criteri di valutazione. Infatti dal punto di vista applicativo, come detto, sebbene da una parte è sempre ricavabile il valore attuale di una successione di flussi di cassa (fissando il tasso di valutazione) mentre, al contrario, non è sempre possibile ricavare il TIR; come conseguenza di questa situazione appare però non fissata la convenienza, a priori, di un'operazione sull'altra, in base ai criteri di valutazione utilizzati: si può giungere a conclusioni diverse, rispetto alle stesse operazioni, applicando criteri diversi ma mantenendo una perfetta coerenza (e razionalità) nella scelta.



Operazione di investimento



Operazione di finanziamento

Criteri di Valutazione di "Grandezze Aleatorie"

Le situazioni affrontate in precedenza hanno tutte come punto in comune quello di essere considerate, per assunzione, *certe.* Da questo momento tale condizione verrà rimossa e si parlerà, appunto, di valutazione di grandezze che presentano un differimento temporale il quale comporta una incertezza nel sistema (a volte tale incertezza è intrinseca nel caso che si va ad analizzare, ad esempio il gioco d'azzardo).

Criterio del Valor Medio

Un primo modo per risolvere il problema dell'incertezza è quello di considerare tutti i possibili valori che una variabile può assumere e considerarne il valor medio.
Applicando questo criterio l'operazione non è più solo assimilabile ad una dinamica di incertezza, ma, dove all'inizio essa viene riscontrata, si sostituisce il valor medio considerato, stavolta, *certo*.

Ad ogni momento (t) è associata una variabile casuale $X = \{(x_i, p_i)\}$, dove x_i sono le possibili determinazioni che la variabile può assumere e p_i la sua probabilità; è dunque ora possibile generalizzare la valutazione di tali operazioni secondo questo criterio

$$E x_i p_i \quad (X) = \sum$$

$$\left\{ V.A.M. = \sum_{x=t+1}^{n} E(X_x)(1+j)_{t-x} \right.$$

Il V.A.M. è il Valore Attualizzato Medio dell'operazione.

Il Criterio del Valor Medio definisce anche il concetto di gioco equo e, parallelamente, non equo (vantaggiososvantaggioso).
Si dice equo un gioco il cui valore atteso della vincita sia pari al prezzo per partecipare; è vantaggioso un gioco il cui valore atteso della vincita sia maggiore del prezzo per partecipare; è svantaggioso un gioco il cui valore atteso della vincita sia minore del prezzo per partecipare.

$$E(X) = Prezzo \rightarrow gioco\ equo$$
$$E(X) > Prezzo \rightarrow gioco\ vantaggioso$$
$$E(X) < Prezzo \rightarrow gioco\ svantaggioso$$

Per quanto riguarda le Assicurazioni e gli assicuratori, essi rivestono un ruolo importante come soggetti all'interno del mercato grazie alla loro funzione di annullamento del rischio dietro pagamento.
Il pagamento dell'assicurazione corrisponde(rebbe) all'attualizzazione, secondo la probabilità, della perdita futura presunta, in questo caso si parla di *premio puro.*

$$premio\ puro = \sum vC_i p_i$$

Però l'assicuratore, anche se potenzialmente molto ricco, deve, altrettanto potenzialmente concedere assicurazioni a tutto il mercato, il quale, nella sua totalità è ovviamente molto più ricco ($\rightarrow \infty$); questo, come dimostrato da De Finetti, la probabilità di rovina di un giocatore (assicuratore) rispetto ad un altro che ha a disposizione un capitale tendenzialmente infinito è certa, se il gioco è equo. Infatti

$$P_{rovina} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{CAP_{ass} + x} = 1$$

dove x rappresenta il capitale del mercato.

Dunque, per restare in vita, nel lungo periodo, l'assicurazione deve richiedere un premio maggiorato, ovvero aumentato di una quota detta *caricamento*.
Secondo il criterio del Valor Medio risulta quindi sempre sconveniente, se c'è un caricamento, assicurarsi, in quanto il gioco non sarebbe più equo.

Il principale limite del criterio del Valor Medio risiede nel fatto che ogni V.C. presa in considerazione è poi ridotta al suo valore atteso; è un criterio eccessivamente miope e grezzo.

Teoria dell'Utilità

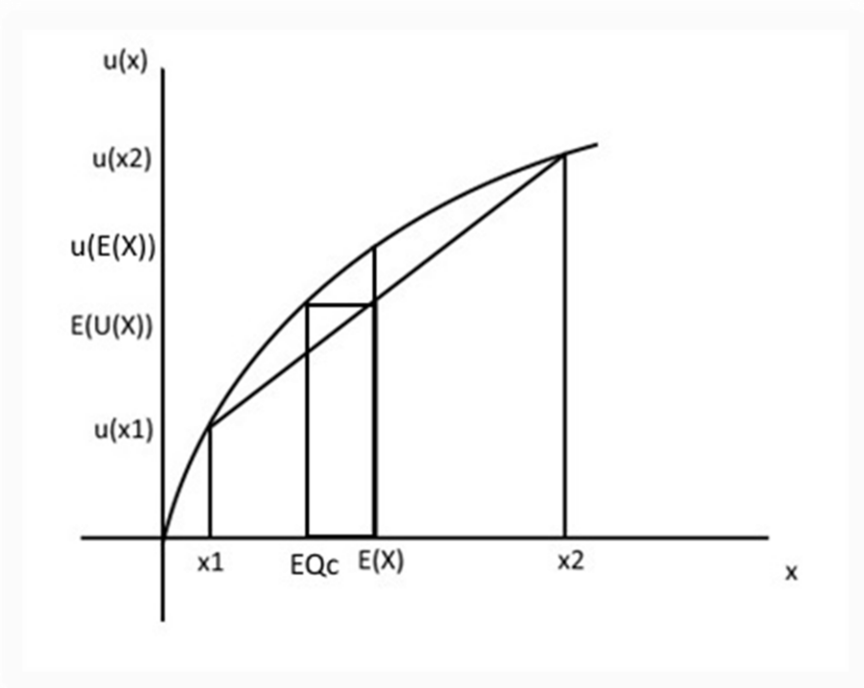
La teoria dell'Utilità si avvale del concetto di baricentro (*valor medio della distribuzione della massa del sistema nello spazio),* applicandolo all'incertezza di tutti i possibili valori che possono essere ottenuti.

X è la variabile casuale composta da $\{(x_i, p_i)\}$
u=u(x) è la funzione di utilità variabile per ogni soggetto, la si considera con derivata prima sempre maggiore di 0 in quanto, per ipotesi e logica, è sempre crescente (più è meglio).

L'utilità della V.C. X è, dunque

$$u(X) = E(U(X)) = \sum u(x_i)p_i$$

ovvero, la media delle utilità.
Tale caratteristica, nel caso più semplice in cui si abbiano solo due determinazioni possibili, porta alla seguente determinazione grafica (N.B. nel caso in cui il soggetto sia ***avverso*** al rischio).



Come si evince dal grafico, l'utilità risultante dalla V.C. X non giace sulla curva di utilità (concetto di baricentro).

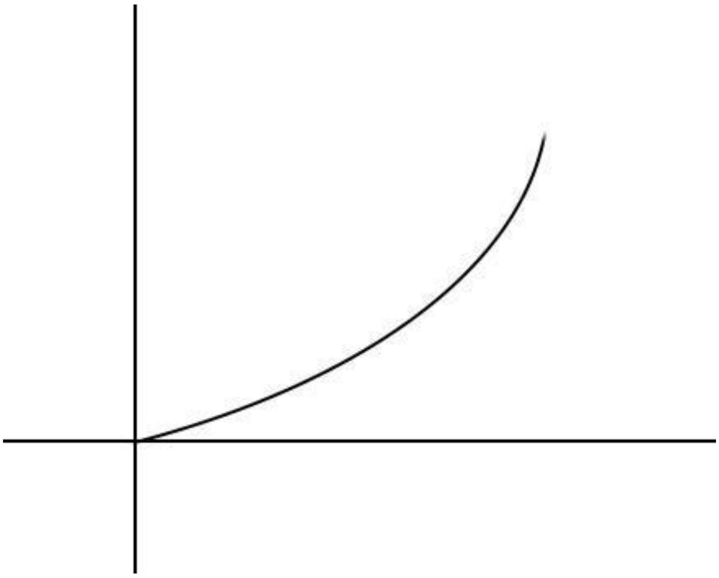
Ad ogni valore di utilità dato da una V.C. corrisponde un valore "utile allo stesso modo", dato da un valore certo, tale valore è detto *equivalente certo (EQc).*

Conformazione della curva d'Utilità e avversione al rischio

La curva d'utilità esprime le preferenze proprie di un soggetto all'ottenimento di somme certe e alla loro entità.
Come già detto, la derivata prima della funzione è sempre maggiore di zero; ciò che non è sempre conosciuta a priori è la derivata seconda.
La derivata seconda esprime le vere preferenze del soggetto: essa rappresenta infatti la concavità della funzione, ovvero l'eventuale propensione/avversione/indifferenza al rischio.

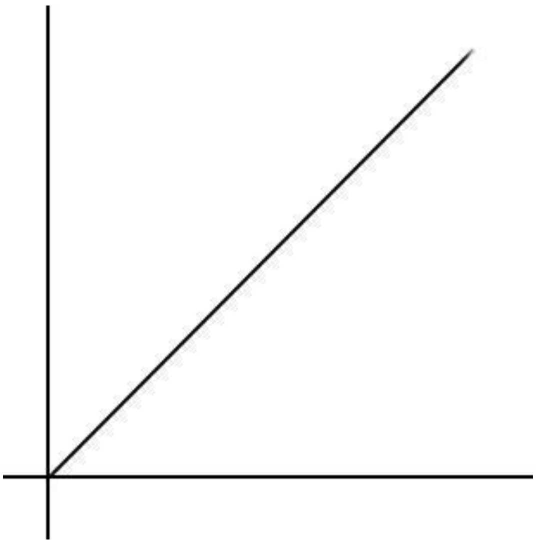
$$\begin{cases} \alpha(x) = avversione\ al\ rischio = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)} \\ u'(x) > 0 \quad \forall x \end{cases}$$

quindi

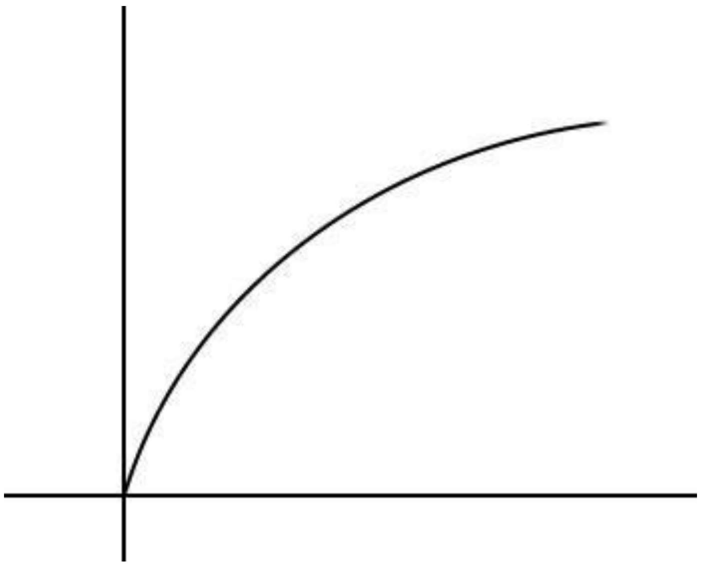


$u''(x) > 0 \rightarrow propensione$

$u''(x) = 0 \rightarrow indifferenza$



$u''(x) < 0 \rightarrow avversione$



La funzione di utilità del soggetto indifferente al rischio è una funzione lineare,

$$\begin{cases} u(x) = ax \quad a > 0 \\ u'(x) = a \\ u''(x) = 0 \end{cases}$$

va notato che nel caso $a = 1$ la funzione di utilità è quella che definisce il criterio del Valor Medio.

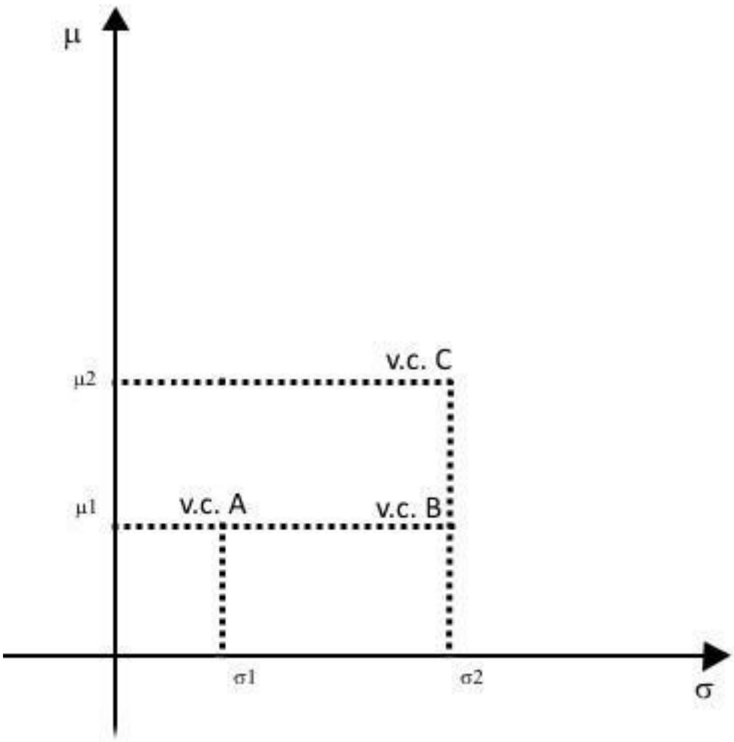
Il principale limite della Teoria dell'Utilità è la mancanza di oggettività rispetto ai risultati ai quali porta; la curva stessa è totalmente soggettiva, risulta dunque impossibile determinare quale situazione sia, a priori, la scelta più conveniente.

Criterio Media-Varianza

Partendo dalle critiche verso il criterio del Valor Medio e la teoria dell'Utilità ci si rende conto che è necessario, per potere effettivamente giudicare qualcosa di incerto, di un criterio che, per certi versi, sia "in mezzo" ai due già citati; ovvero, sia applicabile e tenga in considerazione di più caratteristiche della variabile casuale.
Il criterio Media-Varianza, come si nota dal nome, ha come basi di giudizio di una V.C. la sua media e la sua varianza, la quale rappresenta il *rischio.*

Va ricordato che

$$nella\ V.C.\ X = \{x_i, p_i\} \quad \begin{cases} \mu_x = \sum x_i p_i \\ \sigma^2_x = \sum (x_i - \mu_x)^2 p_i \end{cases}$$



Risulta, anche intuitivamente, che tra le V.C. a disposizione una media alta rappresenta un valore "favorevole", mentre una varianza alta rappresenta un valore "sfavorevole".

Dal grafico:

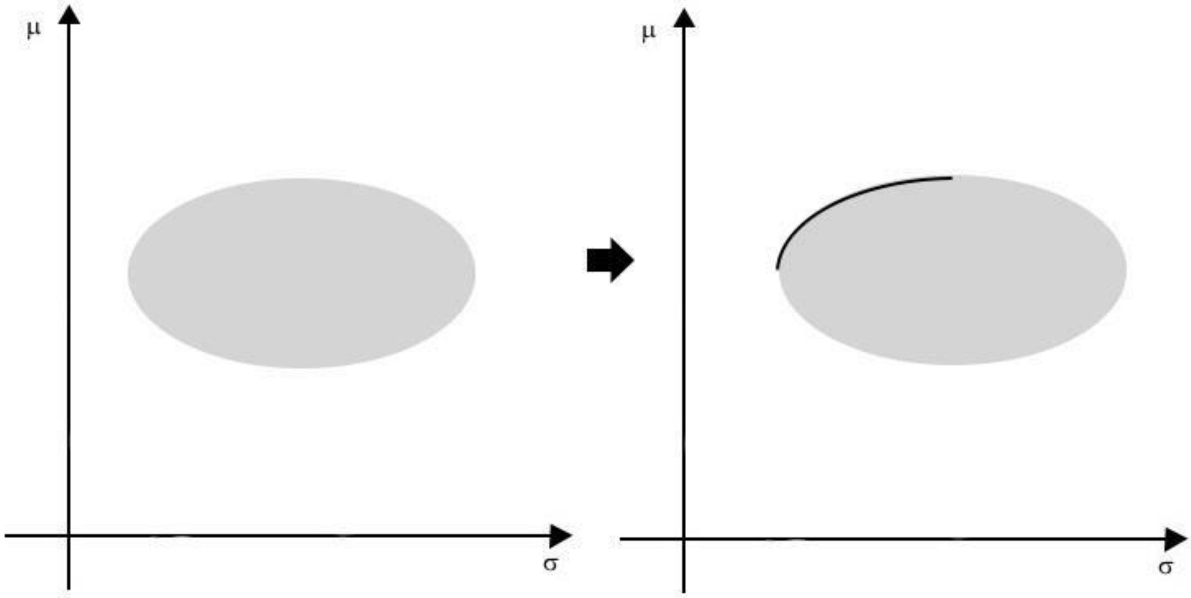
$$\sigma 2 = \sigma_C = \sigma_B$$

$$\{\mu 1\ \mu{=}2\mu{>}_A\ \mu{=}1\ \mu_B$$

$$\sigma 2 > \sigma 1$$

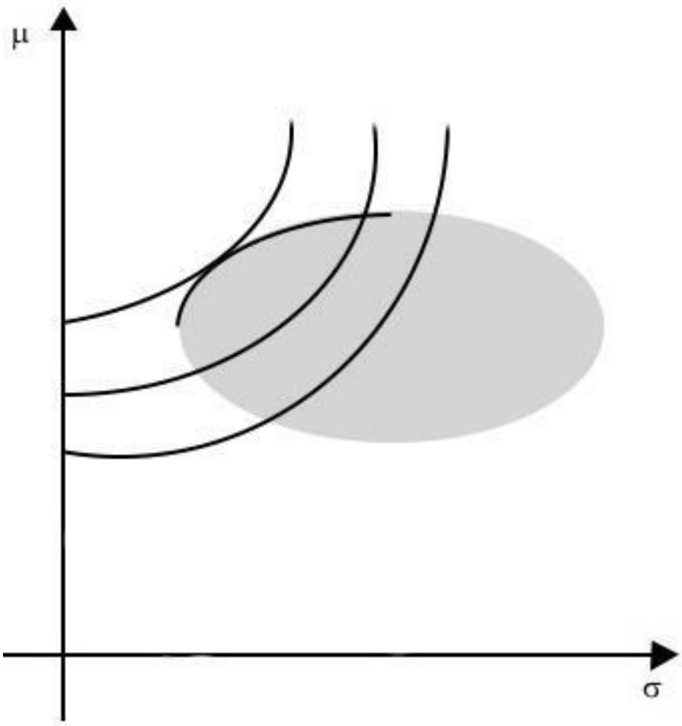
Quindi A è migliore di B, avendo stessa media e varianza minore, mentre C è migliore di B, avendo stessa varianza ma media maggiore: B è, dunque, sempre sconveniente. Ciò che non risulta giudicabile è invece quale sia preferibile tra A e C, non essendo, nessuna delle due, certamente più conveniente dell'altra.

Per quanto riguarda, in generale, l'insieme delle possibili scelte da compiere si introduce il concetto di *frontiera efficiente* (contorno messo in evidenza).



La frontiera efficiente è composta da tutte quelle combinazioni di investimenti che non sono giudicabili migliori o peggiori fra loro, nel senso che ogni punto "a sinistra" nella frontiera efficiente ha una varianza e una media più bassa di un qualsiasi punto, sempre appartenente alla frontiera e, allo stesso tempo, *rappresenta quella combinazione tale per cui ogni punto appartenente ad essa abbia media maggiore a parità di varianza (rischio) o varianza minore a parità di media*.

Per arrivare, in finale, a porre un giudizio sulle scelte possibili, va, anche in questo caso, presa in considerazione il parere soggettivo, tramite l'introduzione delle *curve di indifferenza*.



Le curve di indifferenza esprimono, appunto, l'indifferenza del soggetto rispetto alla possibilità di avere qualcosa di certo (il punto di intersezione con $\sigma = 0$) o avere di più con più rischio; una curva verticalmente più alta rappresenta una soddisfazione maggiore mentre è impossibile che due curve di indifferenza si intersechino, perché, dato che ad ogni curva corrisponde un equivalente certo, nel punto di intersezione gli equivalenti sarebbero due.

Il punto di ottimo soggettivo sarà dunque nel punto di tangenza tra la curva di indifferenza e la frontiera efficiente.

Teoria del Portafoglio

In un qualsiasi momento, sul mercato, sono a disposizione svariate possibilità di investimento.
Se si scegliesse di investire in un determinato titolo occorrerebbe pagarlo a_0, aspettandosi una remunerazione, ad esempio per la vendita futura, pari al valore futuro del titolo (A)=, oltre che ai possibili dividendi o cedole da esso derivanti (M).
Dove sia A che M sono variabili casuali, dato che, al momento dell'acquisto non si conoscono le variazioni future (al massimo le si può stimare).

Allora:

$$\frac{A+M}{a_0} = r \text{ ovvero } \frac{montante}{capitale\ investito}$$

quindi

$$\frac{A+M}{a_0} - 1 = i = rendimento\ titolo\ a_0$$

Il rendimento del titolo è anche'esso una variabile casuale (essendo composto da variabili casuali).
Il rendimento del titolo è dunque definito da un valore atteso μ_i e da una varianza $\sigma^2{}_i\,(deviazione\ standard\ \sigma_i)$: quindi è collocabile all'interno del grafico media-varianza, secondo le sue coordinate.

Poste queste generalità, risulta comprensibile ipotizzare la situazione in cui, all'interno di un mercato, siano disponibili più titoli tra cui scegliere, la cui combinazione genera un *portafoglio*.

$$\begin{cases} P = portafoglio = \sum x_i i_i \\ \sum x_i = 1 \end{cases}$$

dove x_i rappresenta la composizione percentuale di ogni titolo all'interno del portafoglio; la somma delle quote è 1 in quanto rappresenta la totalità del capitale investito.

$$\begin{cases} \mu_P = \sum x_i \mu_i \\ \sigma_P^2 = \sum x_i^2 \sigma^2{}_i + 2 \sum_{i \neq j} x_i x_j \sigma_{ij} \quad (se\ i \neq j) \end{cases} \qquad \sigma_{ij} = covarianza$$

Va ricordato che

$$\rho_{ij} = indice\ di\ correlazione = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

e che quindi

$$\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Allora, nel caso specifico in cui siano disponibili solo due titoli, l'insieme dei portafogli possibili ha come caratteristiche

$$\{1 = x\mu 1P + = xx21 \rightarrow \mu 1\, x + 2\, \mu = 2x12 - x1$$

Dalle quali

$$\mu_P = x_1\mu_1 + \mu_2(1 - x_1)$$

$$x_1 = \frac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$$

$$x_2 = 1 - x_1 = 1 - \frac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \quad \frac{\mu_1 - \mu_P}{\mu_1 - \mu_2} =$$

E la sua rappresentazione nel piano media-varianza è

$$\{\sigma 2P = x12\sigma 21 + \sigma 22x22 + 2\sigma 12x1x2$$

$$\sigma 12 = \sigma 1\sigma 2\rho 12$$

$$\sigma 2P = x12\sigma 21 + \sigma 22x22 + 2x1x2\sigma 1\sigma 2\rho 12$$

$$\left\{ x_1 = \frac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \quad \mu_1 - \mu_P \quad x_2 = \frac{}{\mu_1 - \mu_2} \right.$$

$$\sigma 2_P = \left[\frac{\mu_P - \mu 2}{\mu 1 - \mu 2}\right]2\, \sigma 21 + \sigma 22 \left[\frac{\mu 1 - \mu P}{\mu 1 - \mu 2}\right]2 + 2\left[\frac{\mu_P}{\mu 1 - \mu 2}\ \frac{}{\mu 1 - \mu 2}\right] - \mu 2][\mu 1 - \mu P]\sigma 1\sigma 2\rho 12$$

Questa equazione descrive, come detto, tutti i portafogli realizzabili ed ha la forma di un'iperbole.
Parte rilevante dell'equazione è il ruolo svolto dall'indice di correlazione, ρ_{12}, dei titoli presi in considerazione; essa assume forme diverse a seconda del valore che esso assume.

$$\mu^2_P = \left[\frac{}{\mu}\right] \sigma^2_1 + \sigma^2_2\left[\frac{}{}\right] + 2\left[\frac{}{\mu}\right]\left[\frac{}{} \sigma_1\sigma_2\rho_{12}\right.$$

$$1 \leq \rho_{12} \leq 1$$

$$P \quad 2 \quad 1 \quad P \quad P \quad 2 - \mu \quad 2 \quad \mu - \mu \quad 2 \quad \mu \quad - \mu \quad \mu 1 - \mu P$$

$$\sigma]$$

$$\{ \quad {}_1 - \mu_2 \qquad \mu_1 - \mu_2 \qquad {}_1 - \mu_2 \quad \mu_1 - \mu_2$$

Si distinguono ora tre casi, legati al variare di ρ_{12}.

Se $\rho_{12} = 0$ allora

$$\sigma^2_P = \left[\frac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right]^2 \sigma^2_1 + \sigma^2_2 \left[\frac{\mu_1 - \mu_P}{\mu_1 - \mu_2}\right]^2$$

Se $\rho_{12} = 1$ allora

$$\sigma^2_P = \left[\frac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right]^2 \sigma^2_1 + \sigma^2_2 \left[\frac{\mu_1 - \mu_P}{\mu_1 - \mu_2}\right]^2 + 2\left[\frac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right]\left[\frac{\mu_1 - \mu_P}{\mu_1 - \mu_2}\right] \sigma_1 \sigma_2$$

che però è lo svolgimento del quadrato della somma di un binomio $[a + b]^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, quindi, facendo la radice quadrata si ha

$$\sigma_P = \left[\frac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right] \sigma_1 + \sigma_2 \left[\frac{\mu_1 - \mu_P}{\mu_1 - \mu_2}\right]$$

che è il segmento (l'equazione è lineare infatti) che congiunge μ_1 e μ_2.

Se $\rho_{12} = -1$ allora

$$\sigma^2_P = \left[\frac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right]^2 \sigma^2_1 + \sigma^2_2 \left[\frac{\mu_1 - \mu_P}{\mu_1 - \mu_2}\right]^2 - 2\left[\frac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right]\left[\frac{\mu_1 - \mu_P}{\mu_1 - \mu_2}\right] \sigma_1 \sigma_2$$

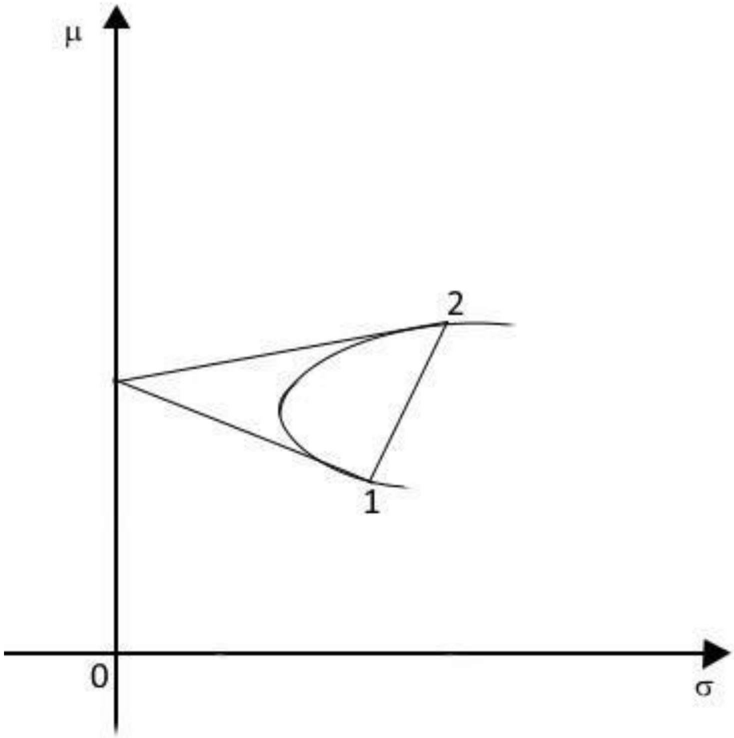
che però è lo svolgimento del quadrato della differenza di un binomio $[a - b]^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, quindi, facendo la radice quadrata si hanno

$$\sigma_P = \left[\frac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right] \sigma_1 - \sigma_2 \left[\frac{\mu_1 - \mu_P}{\mu_1 - \mu_2}\right]$$

$$\sigma_P = -\left[\frac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right] \sigma_1 + \sigma_2 \left[\frac{\mu_1 - \mu_P}{\mu_1 - \mu_2}\right]$$

Queste equazioni rappresentano i segmenti congiungenti μ_1 e μ_2 con il portafoglio di *rischio zero*$(= \sigma_P = 0)$.

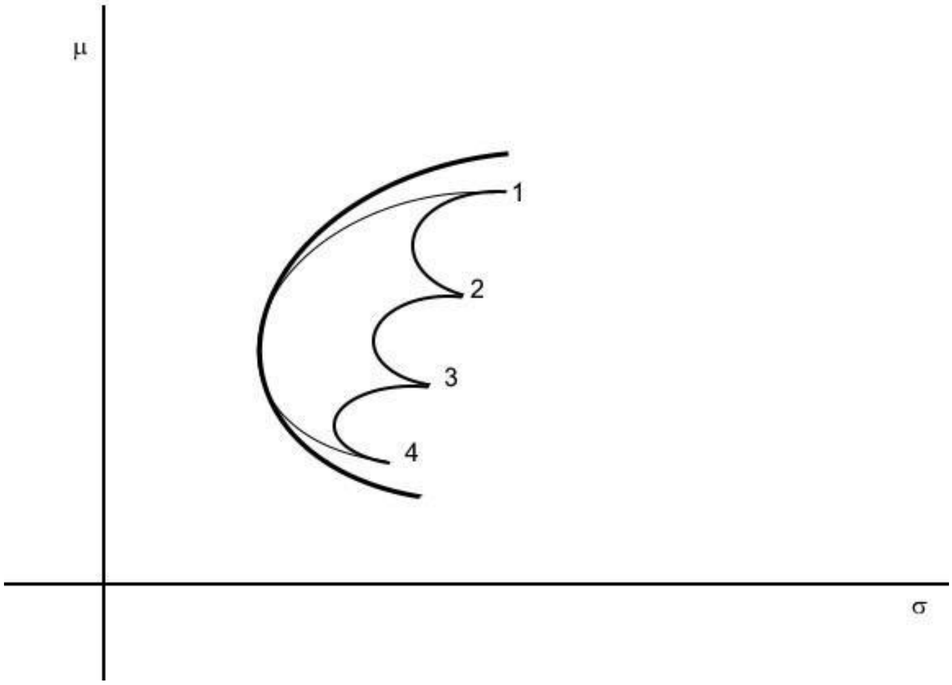
Le soluzioni, in quest'ultimo caso, sono due in quanto, riprendendo il quadrato della differenza di un binomio bisogna notare che $[a - b]^2 = [-a + b]^2$, le cui radici sono, rispettivamente, $[a - b]$ e $[b - a]$.



Se i titoli a disposizione, invece di essere solo 2, sono n, allora, l'insieme di portafogli possibili è definito

$$\sigma^2_P = \sum x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} x_i x_j \sigma_{ij}$$

che rappresenta:
- un ramo d'iperbole, se non è ammessa la vendita allo scoperto -
un'iperbole, se è ammessa la vendita allo scoperto



Proprietà della Frontiera (**se è possibile vendere allo scoperto**)

1) La combinazione di due portafogli di frontiera qualsiasi genera a sua volta un portafoglio di frontiera.
Questo perché la composizione di un qualsiasi portafoglio è data dalla risoluzione di un sistema in cui μ compare come variabile indipendente, ovvero

$$x_i(\mu) = \mu a_i + b_i$$

tale per cui

$$\begin{cases} a_i = 0 \\ b_i = 1 \\ \sum x_i(\mu) = \mu \sum a_i + \sum b_i = 1 \end{cases}$$

dove l'ultima equivalenza indica che la somma di tutte le quote investite deve essere uguale al capitale disponibile (1=100%).

Dati due portafogli di frontiera F_1 e F_2

$$\begin{cases} F^1 = \sum \mu_i x_i(\mu) = \mu_1 \\ F^2 = \sum \mu_j x_j(\mu) = \mu_2 \end{cases}$$

Ponendo, per esempio

$$F_3 = kF_1 + (1-k)F_2$$

N.B. *k+1-k=1* allora le componenti del nuovo portafoglio

$$x_i = k(\mu_1 a_i + b_i) + (1-k)(\mu_2 a_i + b_i) = [k\mu_1 + (1-k)\mu_2]a_i + b_i$$

che appartiene alla retta definita in precedenza

2) Dalla 1 deriva che, dati due portafogli di frontiera F_0 e F_m tali per cui

$$\begin{cases} F^0 = \sum_{m_i x_i}(m_i) = \sum m_i(\mu a_i + b_i) \\ F_m y_j m_j = \sum \end{cases}$$

allora

$$Cov^{(F_0, F_m)} = \sum [m_i(\mu a_i + b_i) - \mu(\mu a_i + b_i)]_{[y_j m_j - y_j \mu_j]}$$

svolgendo

$$Cov^{(F_0, F_m)} = \sigma_{ij} \sum y_j(\mu a_i + b_i)$$

dalla quale

$$\begin{cases} \sum y_j(\mu a_i) = \mu A \\ \sum y_j(b_i) = B \\ Cov(F_0, F_m) = \sigma_{ij}(\mu A + B) \end{cases}$$

Quindi $Cov(F_0, F_m)$ è una funzione lineare rispetto a μ, se i due portafogli sono di frontiera.

3) Se F è un portafoglio di frontiera e P e P' sono due portafogli con lo stesso rendimento medio, allora

$$Cov(F, P) = Cov(F, P')$$

Per dimostrarlo lo si fa per assurdo: si consideri F formato da tre portafogli, ovvero

$$F = x_p P + x_{p'} P' + x_k K$$

Si pone ora, per esempio (ma può farsi con la disuguaglianza opposta)

$$Cov(F, P) < Cov(F, P')$$

svolgendo il primo membro

$$Cov^{(F,P)} = \sum [x_p P + x_{p'} P' + x_k K - x_p \mu_P - x_{p'} \mu_{P'} - x_k \mu_K]\,(P - \mu_P)$$

ovvero

$$Cov(F,P) = x_p\sigma_{p2} + x_{p'}\sigma_{pp'} + x_k\sigma_{pk}$$

mentre il secondo

$$Cov(F,P') = \sum[x_pP + x_{p'}P' + x_kK - x_p\mu_P - x_{p'}\mu_{P'} - x_k\mu_K]\,(P' - \mu_{P'})$$

ovvero

$$Cov(F,P') = x_p\sigma_{pp'} + x_{p'}\sigma_{p'2} + x_k\sigma_{p'k}$$

La varianza del portafoglio F è

$$\sigma_{F2} = x_{p2}\sigma_{2P} + x_{p'2}\sigma_{2P'} + x_{k2}\sigma_{2K} + 2x_px_{p'}\sigma_{pp'} + 2x_kx_{p'}\sigma_{p'k} + 2x_px_k\sigma_{pk}$$

Quindi si considera un portafoglio C formato da

$$C = (c + x_p)P + (x_{p'} - c)P' + x_kK$$

con c>0

Ora, essendo per ipotesi il rendimento medio di P uguale a quello di P', si nota che

$$\begin{cases} \mu_P = \mu_{P'} \\ \mu_F = x_p\mu_P + x_{p'}\mu_{P'} + x_k\mu_k \\ \mu_C = (c + x_p)\mu_P + (x_{p'} - c)\mu_{P'} + x_k\mu_k \end{cases}$$

svolgendo

$$\mu_F = (x_p + x_{p'})\mu_P + x_k\mu_k \{$$

$$\mu_C = (c + x_p + x_{p'} - c)\mu_P + x_k\mu_k = (x_p + x_{p'})\mu_P + x_k\mu_k$$

Quindi F e C hanno lo stesso rendimento medio.

La cui varianza è

$$\sigma_{C2} = (c + x_p)_2\sigma_{2P} + (x_{p'} - c)_2\sigma_{2P'} + x_{k2}\sigma_{2K} + 2(x_p + c)(x_{p'} - c)\sigma_{pp'} + 2x_k(x_{p'} - c)\sigma_{p'k} + 2(x_p + c)x_k\sigma_{pk}$$

purtroppo, svolgendo

$$\sigma_{C2} = c_2\sigma_{2P} + \boldsymbol{x_{p2}\sigma_{2P}} + 2cx_p\sigma_{2P} + \boldsymbol{x_{p'2}\sigma_{2P'}} + c_2\sigma_{2P'} - 2cx_{p'}\sigma_{2P'} + \boldsymbol{x_{k2}\sigma_{2K}} + \boldsymbol{2x_px_{p'}\sigma_{pp'}} - 2c_2\sigma_{pp'} - 2cx_p\sigma_{pp'} + 2cx_{p'}\sigma_{pp'} + \boldsymbol{2x_kx_{p'}\sigma_{p'k}} - 2cx_k\sigma_{p'k} + \boldsymbol{2x_kx_p\sigma_{pk}} + 2cx_k\sigma_{pk}$$

le parti in grassetto sono esattamente $\sigma_F{}^2$!

$$\sigma C2 - \sigma F2 = c(c\sigma 2P + 2x_p\sigma 2P + c\sigma 2P' - 2x_{p'}\sigma 2P' - 2c\sigma_{pp'} - 2x_p\sigma_{pp'} + 2x_{p'}\sigma_{pp'} - 2x_k\sigma_{p'k} + 2x_k\sigma_{pk})$$

$\sigma C2 - \sigma F2 = c[c(\sigma 2P + \sigma 2P' - 2\sigma_{pp'}) + 2(\boldsymbol{x_p\sigma 2P + x_{p'}\sigma_{pp'} + x_k\sigma_{pk}}) - 2(\boldsymbol{x_{p'}\sigma 2P' + x_k\sigma_{p'k} + x_p\sigma_{pp'}})]$ stavolta le parti in grassetto rappresentano, rispettivamente, $Cov(F,P)$ e $Cov(F,P')$; ricordando che, per ipotesi, la prima è minore della seconda, allora la loro differenza è una quantità positiva

$$\begin{cases} \sigma^2{}_P + \sigma^2{}_{P'} - 2\sigma_{pp'} = Var(P - P') > 0 \\ Cov(F,P') - Cov(F,P) = A > 0 \\ \sigma_F{}^2 - \sigma_C{}^2 = c[-cVar(P - P') + 2A] \end{cases}$$

quindi, si trova che il secondo membro è positivo dell'ultima equivalenza è positivo se

$$c[-cVar(P - P') + 2A] > 0$$

risolvendo

$$0 < c < \frac{2A}{Var(P - P')}$$

ma se effettivamente così fosse significherebbe che

$$\sigma F2 - \sigma C2 > 0 \rightarrow \sigma C2 < \sigma F2$$

situazione che porterebbe ad affermare l'esistenza di un portafoglio con rendimento atteso uguale ad F ma varianza minore di F, cosa NON possibile essendo F, per ipotesi, di frontiera efficiente. Quindi, in conclusione

$$Cov(F,P) = Cov(F,P')$$

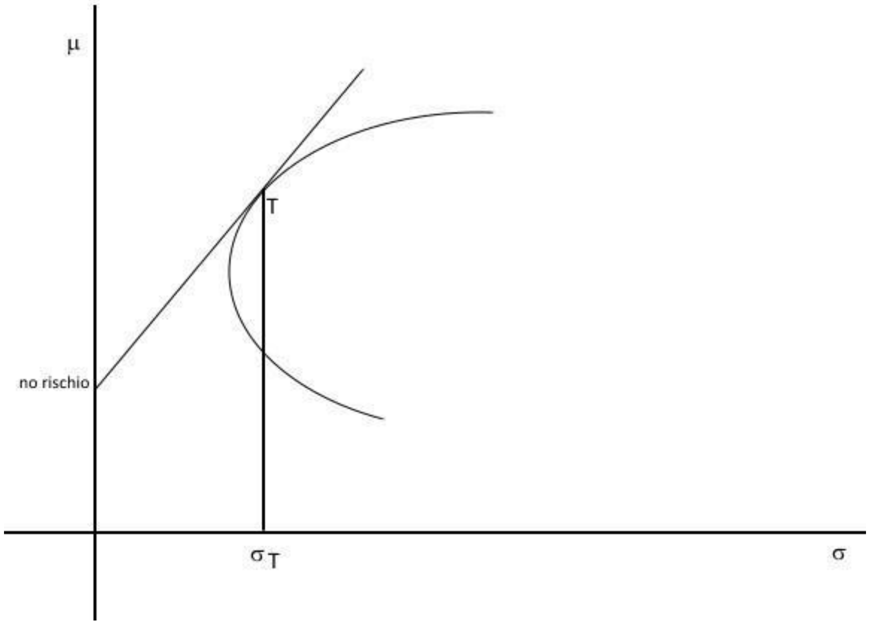
4) Lo stesso procedimento può essere usato per dimostrare che, sia P_{min} il portafoglio di frontiera efficiente e P un portafoglio qualsiasi, allora

$$Cov(P_{min},P) = Var(P_{min})$$

Caso di n titoli rischiosi e uno non rischioso

Nel caso sia possibile investire "senza rischio" le opportunità cambiano drasticamente rispetto alle situazioni precedenti.

Caso 1)



Questo caso prevede la vendita allo scoperto di titoli senza rischio e il contestuale acquisto di titoli rischiosi (portafoglio T).

Nel caso ci fosse la possibilità di vendere allo scoperto titoli senza rischio, la composizione della frontiera efficiente cambia ed assume la forma di una semiretta passante: per il punto di rendimento senza rischio e tangente alla frontiera efficiente che si creerebbe nel caso il senza rischio non ci fosse (T). La frontiera efficiente è , dunque

$$\mu = \frac{\mu_T - \mu_0}{\sigma_T} \sigma_P + \mu_0$$

Ogni portafoglio efficiente sarà formato dalla combinazione

$$F = x_T T + x_0 C$$

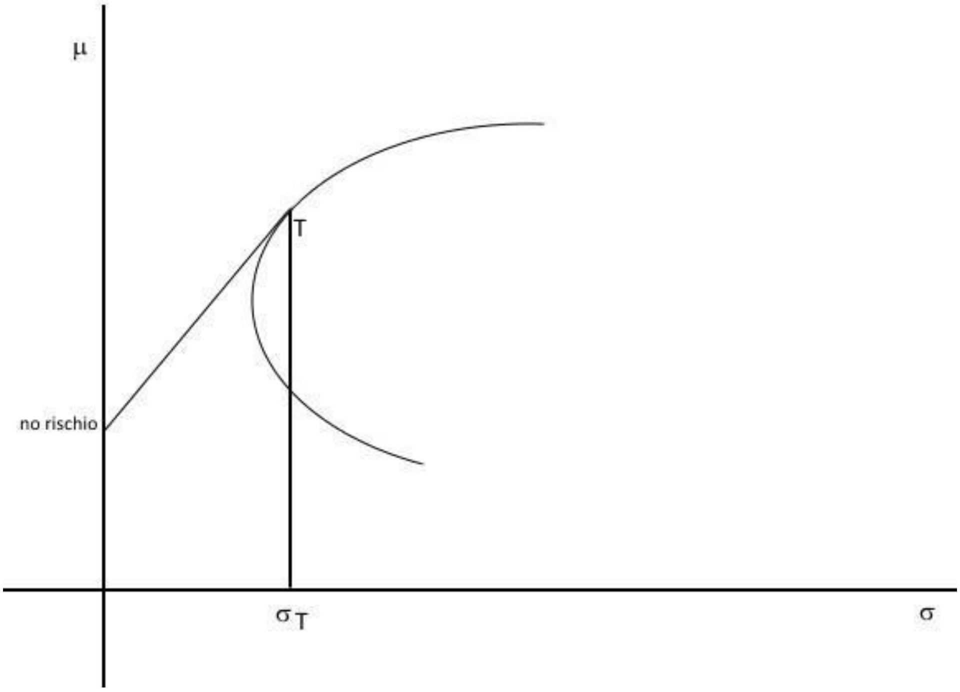
sempre sotto la condizione che $x_T + x_0 = 1$ quindi,

se $x_T, x_0 > 0$ allora ci si trova nella parte compresa tra 0 e σ_T se

$x_T = 1, x_0 = 0$ allora ci si trova esattamente in σ_T

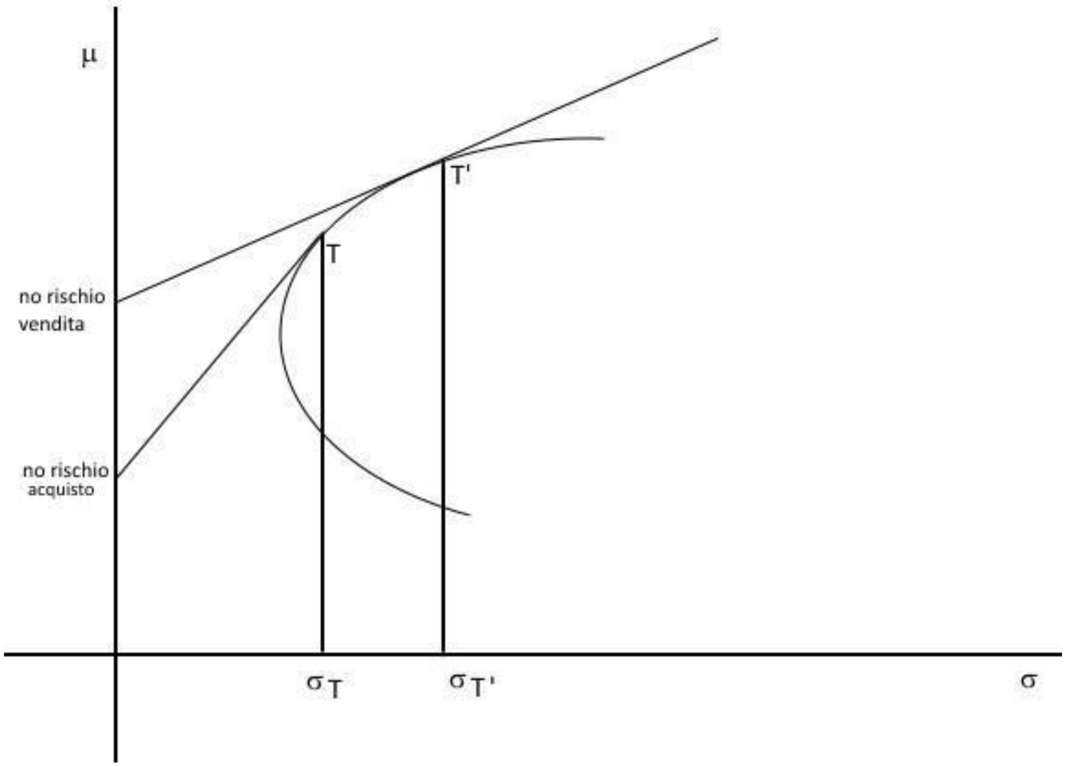
se $x_T > 1, x_0 < 0$ allora ci si trova oltre σ_T

Caso 2)



Se invece non è possibile vendere allo scoperto il titolo senza rischio, la frontiera efficiente è composta dal segmento che unisce il titolo senza rischio e il portafoglio T, oltre questo punto, però, torna ad essere valida la frontiera creata senza il titolo senza rischio.

Caso 3)



Questa situazione prevede tassi di indebitamento (vendita) e tassi di acquisto diversi tra loro (pareva troppo favorevole la situazione del Caso 1).
Sostanzialmente si comincia a vendere allo scoperto solo quando si vuole ottenere un rendimento medio maggiore o uguale a T '; infatti la frontiera efficiente è definita dal segmento che unisce il titolo di acquisto senza rischio e il portafoglio T, nella parte intermedia è valida da T a T' la "vecchia" frontiera efficiente, mentre, nella parte finale la semiretta passante per il titolo di vendita senza rischio e per T' e tangente (come nel Caso 1) alla "vecchia" frontiera efficiente.

Il fatto che questo caso sia meno favorevole rispetto al Caso 1 lo si può vedere dall'inclinazione che ha la semiretta tangente in T' (minore della tangente in T).

Equilibrio di Mercato

Considerando il Caso 1, la frontiera efficiente è definita da

$$\mu = \frac{\mu_T - \mu_0}{\sigma_T}\sigma + \mu_0$$

la quale rappresenta, come visto, una retta (semiretta se si considera $\sigma \geq 0$); riprendendo anche quanto detto quando è stata trattata la situazione in cui erano disponibili solo 2 titoli e la loro correlazione (ρ), nel caso in cui essi erano perfettamente correlati essi avevano $\rho = 1$ ed erano uniti da un segmento (ovvero una "parte" di retta). Detto ciò, tutti i titoli sulla retta della frontiera efficiente hanno $\rho = 1$.

$$\rho_{TP} = 1 = \frac{Cov(P,T)}{\sigma_P \sigma_T}$$

$$\mu = \frac{\mu_T - \mu_0}{\sigma_T}\sigma_P + \mu_0$$

quindi

$$\mu = \frac{\mu_T - \mu_0}{\sigma_T^2} Cov(P,T) + \mu_0$$

dove

$$\frac{Cov(P,T)}{\sigma_T^2} = \beta$$

ovvero rappresenta la tendenza del portafoglio a muoversi in "sincronia" con il mercato.
Ad esempio
$\beta = 0$, portafoglio senza rischio
$\beta < 1$, portafoglio più che opposto all'andamento del mercato
$\beta > 1$, portafoglio più che sincrono all'andamento del mercato
$\beta = 1$, portafoglio che definisce il mercato
$\beta = -1$, portafoglio esattamente opposto al mercato

FINE!

Spero di avervi dato qualcosa, di essere stato abbastanza chiaro e grazie per averli usati.

Francesco Fra