MATEMATICA FINANZIARIA

a cura di © Sara Di Lullo

UNINFORMAZIONE

SOLUZIONI ESERCITAZIONI

PIANI DI AMMORTAMENTO

Data la struttura dei fattori di sconto a pronti $d_{(0,1)}$, $d_{(0,2)}$, $d_{(0,3)}$, $d_{(0,4)}$ (dove il tempo è espresso in anni), si vuole rimborsare un debito D con 4 rate annuali, costanti e posticipate, di importo R. *Determinare R*. [$d_{(0,1)} = 0{,}98$; $d_{(0,2)} = 0{,}97$; $d_{(0,3)} = 0{,}96$; $d_{(0,4)} = 0{,}955$ D = 160.000]

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{d}_{(0,1)} + \mathbf{d}_{(0,2)} + \mathbf{d}_{(0,3)} + \mathbf{d}_{(0,4)}} = \frac{160.000}{0{,}98 + 0{,}97 + 0{,}96 + 0{,}955} = 41.397$$

Quanti pagamenti sono necessari per rimborsare D euro con **rate costanti semestrali di importo non superiore a K euro** se il tasso di interesse annuo è 12% e la capitalizzazione degli interessi è semestrale? Riportare la prima riga del piano di ammortamento corrispondente. [D = 1000, K = 150]

Quando il **tasso annuo è capitalizzato $(1 + r/m)^{mt} = (1 + r_m)$** ma si approssima a $r_m \approx \frac{r}{m}$ = 0,12 / 2 = 0,06

$d_m = \frac{1}{1+r_m} = \frac{1}{1,06} = 0,943396$

$_1 = \frac{D_0}{a_{n\neg r}} \rightarrow \frac{D}{a_{n\neg r}} \leq K \rightarrow 1 - d^N \geq \frac{D \cdot i}{K} \rightarrow d^N \leq 1 - \frac{D \cdot i}{K} \rightarrow N\,[\log(d)] \leq \log(1 - \frac{D \cdot i}{K}$ **R**$) \rightarrow$

$\rightarrow N \geq \frac{\log\left(1-\frac{D \cdot i}{K}\right)}{\log(d)} \rightarrow N \geq \frac{\log\left(1-\frac{1000 \cdot 0,06}{150}\right)}{\log(d)} \rightarrow N \geq \frac{\log(0,6)}{\log(0,943396)} = \frac{-0,22}{-0,0253} = 8,69$

→ quindi deve essere N ≥ 9.

$R_1 = \frac{D_0}{a_{n\neg r}}$ = 1000 / 6,8 = 147

$I_1 = D_0 \cdot r$ = 1000 · 0,06 = 60

$C_1 = R_1 – I_1$ = 147 – 60 = 87

$D_1 = D_0 – C_1$ = 1000 – 87 = 913

Un debito D viene rimborsato in n rate mensili costanti al tasso r annuo con capitalizzazione mensile. Determinare la prima rata, quota capitale, quota interesse e debito residuo.
[n = 30;   r = 0,2;   D = 1000]

$r_m \approx \frac{r}{m}$ = 0,2 / 12 = 0,016666

R = D / an¬r = 1000 / 23,5542 = 42,45

I = D · r = 1000 · 0,01666 = 16,66

C = R – I = 42, 45 – 16,66 = 25,79

D = D – C = 1000 – 25,79 = 974,21

Per rimborsare un debito di 1000 euro viene proposto un piano di ammortamento a un Tasso Annuo Nominale i con m rate mensili e costanti e una rata di preammortamento. Riportare l'importo della **rata di pre-ammortamento** Rp e della rata costante R. Calcolare il **TIR y del piano di ammortamento**.

[i = 10%, m = 14] $r_m \approx \frac{r}{m}$ =
0,1 / 12 = 0,008333

La **rata di preammortamento** è **$R_p = D \cdot r$** = 1000 · r = 1000 · 0,008333 = 8,3333

La rata di ammortamento è $R = \frac{D_0}{a_{n\neg r}}$ = 1000 / 13,16 = 75

Il **TIR** è **il tasso annuo effettivo equivalente** $Y = (1 + r)^{12} - 1$

Per rimborsare un debito di 1000 euro viene proposto un piano di ammortamento le cui prime due righe sono

k	D	R	C	I
0	1000	0	0	0
1	900	160	100	60

Calcolare la riga successiva del piano di ammortamento nel caso
1. di rimborso a **rate costanti (Francese)**
2. di rimborso a **quota capitale costante (Italiano)** 1) Nel caso di **rate costanti (F) r =**

$\frac{I_1}{D_0}$ = 60 / 1000 = 0,06 → $I_2 = D_1 \cdot r$ = 900 · 0,06 = 54

$C_2 = R_2 – I_2$ = 160 – 54 = 106

$D_2 = D_1 - C_1$ = 900 – 100 = 800

→

k	D	R	C	I
2	800	160	106	54

2) Nel caso di **quota capitale costante (I)**

$r = I_1 / D_0$ = 60 / 1000 = 0,06 → $I_2 = D_1 \cdot r$ = 900 · 0,06 = 54

$R_2 = C_2 + I_2 = 100 + 54 = 154$ $D_2 = D_1 - C_1 = 900 - 100 = 800$

→	k	D	R	C	I
	2	800	154	100	54

In un piano di ammortamento a **quota capitale costante**, il debito iniziale è D, il numero delle rate è N e l'importo della prima quota interesse è I_1. *Determinare l'importo della prima rata R_1.* [D = 4500; N = 12; I_1 = 100]

$\mathbf{C_0 = 0}$ $\mathbf{C_1 = C_2 = ... = C_{12} = \frac{D}{N}} = 4500 / 12 = 375$ $R = C + I = 375 + 100 = 475$

Un prestito di 10.000 € viene ammortizzato al tasso nominale annuo del 6% tramite il pagamento di N rate mensili costanti posticipate. *Determinare l'importo R della rata* [N = 40]

$(1 + r)^{mt} = (1 + r_m)$ → $r_m = (1 + r)^{mt} - 1$ → $r_m = (1,06)^{1/12} - 1$ → $r_m = 0,004867$

$R = \frac{V}{a_{n\neg r}} = V / [(1 - d_m^{40}) / r_m] = 10.000 / [1 - (0,9951)^{40}] / 0,004867] = 10.000 / [(0,1784 / 0,004867)] = 273$ €

Un debito D viene rimborsato in n rate semestrali a quota capitale costante al tasso r annuo con capitalizzazione semestrale. *Determinare la prima rata, quota capitale, quota interesse e debito residuo.*

[D = 1000; n = 20; r = 10%] $r_m \approx \frac{r}{m} = 0,1 / 2 = 0,05$ $C_0 = 0$ $C_1 = C_2 = \dots = C_{20} = D / n = 1000 / 20 = 50$

$I_1 = D_0 \cdot r = 1000 \cdot 0,05 = 50$ $R_1 = C_1 + I_1 = 50 + 50 = 100$ $D_1 = D_0 - C_1 = 1000 - 50 = 950$

Data la struttura dei fattori di sconto a pronti (d_1; d_2; d_3) = (0,99; 0,98; 0,97) si vuole rimborsare un debito D con 3 rate posticipate costanti d'importo R. *Determinare R.* [D = 3500]

$Rd_1 + Rd_2 + Rd_3 = D$ → $R = D / (d_1 + d_2 + d_3) = 3500 / (0,99 + 0,98 + 0,97) = 3500 / 2,94 = 1190,47$

La costruzione di un nuovo tratto autostradale ha un costo iniziale di 10 milioni di Euro. La società realizzatrice richiede un finanziamento per coprire completamente tale costo, essendo disposta a pagare rate annuali non superiori a K milioni di euro, ad un tasso annuo i.

1. Quanti anni N sono necessari per rimborsare il debito con un rimborso a rata costante?
Qual è l'importo della rata R?

2. Riportare la prima quota capitale C_1 e quota interesse I_1. [K = 2; i = 12%]

1) Sapendo che $R = D / a_{n\neg r}$ allora deve essere $D / a_{N\neg r} \leq K$ svolgendo i calcoli avremo

$N \geq \{\log [1 - (D \cdot i/K)]\} / [\log (d)]$ dove D = 10 e d = 1/(1+i)

Allora il numero è uguale al più piccolo numero intero maggiore di N, che svolgendo i calcoli viene uguale a 5,77 e quindi 6.

Quindi viene $R = D / a_{N\neg r} = 10 / 4,1114 = 2,4322$

2) $I = r \cdot D = 0,1 \cdot 10 = 1,2$ $C = R - I = 2,4322 - 1 = 1,232257$

ARGOMENTI INIZIALI

Considerare i flussi V = (- a, 2a)|(0,2) e W = (-a; 1,5a)|(0,1) dove a è un importo positivo e il tempo è misurato in anni.
1. Determinare per quali valori del tasso annuale r il flusso V risulta preferibile al flusso W secondo il ***criterio del VAN****.*
2. Determinare i TIR di r_y e r_w dei due flussi.
3. In quali casi il criterio del VAN e il ***criterio del TIR*** *danno risposte differenti?*
[a = 180]

1) V = (-180; 360)|(0,2) W = (-180; 270)|(0,1)

$VA_V = VA_W$ → $-180 + 360/(1+r)^2 = -180 + 270/(1+r)$ → $360d^2 = 270d$ → $4d^2 - 3d = 0$ → $d(4d - 3) = 0$ → $d = \frac{3}{4}$ → $1 + r = \frac{4}{3}$ → r = 1,333 – 1 = 0.3333

V risulta preferibile a W se r è ≥ 0,3333

2) TIR V: $VA_v = 0$ → $-180 + 360d^2 = 0$ → $d = \sqrt[2]{(180/360)}$ → $\frac{1}{1+r} = 0{,}7071$ → r = (1/0,7071) – 1 = 0,4142

TIR W: $VA_w = 0$ $-180 + 270d = 0$ → d = (180/270) → $\frac{1}{1+r} = 0{,}666$ → r = (1/0,666) – 1 = 0,5

3) Secondo il criterio del TIR e del VAN, è preferibile quello col TIR e VAN maggiori; quindi secondo il criterio del TIR allora W è preferibile a V, per quanto riguarda il VAN quindi è preferibile W a V se e solo se r ≤ 0,333.

Un macchinario ha un costo di acquisto di C euro e per i successivi 12 anni, a partire dalla fine del primo anno, il suo utilizzo genererà un ricavo annuo di X euro.
1. Determinare il valore annuale A dell'intero progetto di investimento rispetto ad un tasso annuo r.
2. Qual è il valore minimo m del ricavo annuo affinché l'investimento risulti conveniente? [C = 150000; X = 30000; r = 15%]

1) Poniamo $- C + Xa_{n\neg r} = A\, a_{n\neg r}$

→ $A = (-C / a_{n\neg r}) + X = (-150.000 \cdot 0{,}15) / [1 - (1/1{,}15)^{12}] + 30.000 = (-22500 / 0{,}8131) + 30000 = 2328$

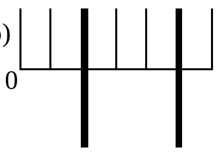
2) che m sia almeno uguale al VA ovvero che m ≥ 27672

Per utilizzare un macchinario per i prossimi 30 anni sono disponibili due opzioni **(problemi sui cicli)**:
- Opzione A (acquisto). Tale opzione prevede una spesa iniziale P = 100 ed una spesa annuale di manutenzione I = 10. Dato che la macchina dura 10 anni, tale ciclo dovrà essere ripetuto tre volte.
- Opzione B (affitto). Tale opzione prevede il pagamento di un canone di affitto costante, da pagarsi anticipatamente ogni due anni (quindi un totale di 15 rate, la prima al tempo 0, l'ultima al tempo 28).

1. Calcolare il valore attuale dell'opzione A rispetto al tasso annuo r = 5 %.
2. Determinare l'importo R del canone di **affitto biennale** *per il quale le due opzioni risultano equivalenti secondo il criterio del VAN.*

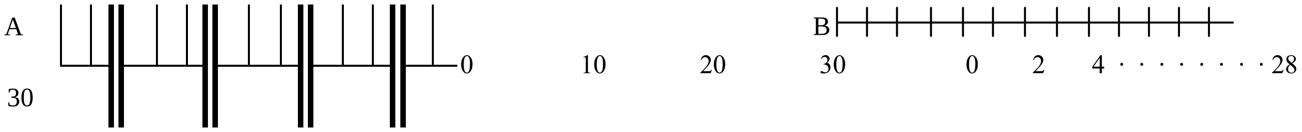
1) P I I I I I I

A (1 ciclo)



0 10

P I · · · P+I · · I · · P+I · · I · · I I I I · · · · · · · · · I



$VA_{10} = P + I\, a_{n\neg r} = 100 + 10[\,(1-d^{10})/r] = 100 + 10\,(7{,}722) = 177{,}2174$

$VA_{30} = VA_{10} + VA_{10}\, d^{10} + VA_{10}\, d^{20} = VA_{10}\,(1 + d^{10} + d^{20}) = 177{,}2174\,(1 + 0{,}613913 + 0{,}376889) = 352{,}80$

2) $VA = R \cdot a_{n\neg r}$

Calcoliamo prima **r biennale** così

$(1 + r)^{mt} = (1 + r_m) \quad \rightarrow \quad r_m = (1 + r)^{mt} - 1 \quad \rightarrow \quad r_m = (1{,}05)^2 - 1 = 1{,}1025 - 1 = 0{,}1025 = 10{,}25\ \%\ a_{n\neg r}$

$= 8{,}267383$

Quindi $R = VA / a_{n\neg r} \quad \rightarrow \quad R = 352{,}8 / 8{,}267383 = 42{,}673$

Se la rata mi risulta maggiore di 42,673 allora $VA_b > VA_a$ e allora per il criterio del VAN mi converrà scegliere A.

Il costo iniziale di un investimento che genera ricavi per 1 milione di euro dopo un anno e per x milioni di euro dopo tre anni è di 2 milioni di euro. *Determinare il valore minimo di x per il quale l'investimento risulta conveniente rispetto al tasso annuo i.* [i = 10%] X = (-2M; 1M; x) | (0; 1; 3)

$VA(x) = -2M + 1M(d) + x(d3) = -2M + 1M/(1{,}1) + xM/(1{,}1)3 = -2M + 0{,}\overline{90}M + xM/1{,}331$ poniamo

$Va(x)=0$ quindi $\qquad xM = (1{,}090909)\,(1{,}331) = 1{,}452\ M$

Si consideri la successione di flussi di cassa (-10; 0; 10; A)|(0; 1; 2; 4) dove il tempo è misurato in anni. *Determinarne il* **T.I.R**

[A = 10]

Poniamo VA (x) = 0 $\quad \rightarrow \quad -10 + 10/(1 + r)^2 + 10/(1 + r)^4 = 0 \qquad$ poniamo $1/(1 + r)^2 = x \quad \rightarrow \quad -10 + 10x + 10x^2 = 0$

$\rightarrow\ x = 1{,}615 \qquad \rightarrow \qquad 1{,}615 = 1/(1 + r)^2 \qquad \rightarrow \qquad r = 0{,}27$

Considerare il flusso di cassa {-50; -70; x; 115}|{0; 2; 4; 5} dove il tempo e misurato in anni.
Se il TIR è r, quanto vale x? [r = 8%] Poniamo VA (x) = 0

$\rightarrow\ -50 - 70/(1 + r)^2 + x/(1 + r)^4 + 115/(1 + r)^5 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = \{50 + [70/(1{,}08)^2] - [115/(1{,}08)^5]\} \cdot (1{,}08)^4 \qquad \rightarrow$

$\rightarrow\ x = (50 + 70/1{,}1664 - 115/1{,}4693) \cdot 1{,}36 = (50 + 60 - 78{,}26) \cdot 1{,}36 = 31{,}74 \cdot 1{,}36 = 43{,}16$

Consideriamo una legge di capitalizzazione degli interessi composti, con tasso annuo i:
1. Per quale valore di i un capitale raddoppia in quattro anni?
2. Se i = 4%, quanto tempo occorre aspettare perché un capitale triplichi?

1) $V_0\,(1 + i)^4 = 2V_0 \qquad \rightarrow \qquad (1 + i)^4 = 2 \qquad \rightarrow \qquad i = 2^{1/4} - 1 = 0{,}18 = 18\ \%$ 2) $V_0\,(1 + 0{,}04)^t = 3V_0$

$\rightarrow \qquad (1{,}04)^t = 3 \qquad \rightarrow \qquad t \log(1{,}04) = \log 3 \qquad \rightarrow \qquad t = \log 3 / [\log(1{,}04)] = 27{,}64$

TITOLI A RENDIMENTO CERTO

Consideriamo un mercato in cui opera una banca ideale con un tasso annuo r. Sia T un titolo che rimborsa un importo costante I ogni due anni per sempre. *1. Determinare il valore attuale di V di T.*

2. Il titolo T è più o meno rischioso (dal punto di vista della sensibilità alle variazioni di tasso di interesse) di uno zero coupon bond che scade tra 20 anni? Motivare la risposta. [I = 8; r = 8%] 1) $(1 + r)^{mt} = 1 + r_m \rightarrow r_m = (1{,}08)^2 - 1 = 0{,}1664$

$V_T = I / r_m = 8 / 0,1664 = 48,07692$ 2)

$D_T = 1 + 1/r = 1+ 1/0,08 = 13,5$

$D_{ZCB} = 20$ Il titolo più rischioso è quello con Duration maggiore, quindi V_T è meno rischioso dello ZCB.

Data la struttura dei fattori di sconto a pronti $d_{(0,1)}$, $d_{(0,2)}$, $d_{(0,3)}$, $d_{(0,4)}$ (dove il tempo è espresso in anni), calcolare:
1. Il ***prezzo a pronti*** *e la* ***duration del flusso*** *x|t = {10,0,110}|{2,3,4}*
2. L'importo I per cui il flusso x|t = (-1000,I,I,1000 + I}|{0,1,2,3} è equo (cioè ha valore nullo) in t = 0.
3. ***Il TAN*** *che deve avere un titolo che paga cedole annuali e matura tra 3 anni* ***per quotare sotto la pari****.*
[$d_{(0,1)} = 0,98$ $d_{(0,2)} = 0,97$ $d_{(0,3)} = 0,96$ $d_{(0.4)} = 0,955$]

1) $P = 10\ d_{(0,2)} + 110\ d_{(0,4)} = 10\ (0,98) + 110\ (0,955) = 9,8 + 105,05 = 114,85$

$D = [(2)\ (10)\ (0,97) + (4)\ (110)\ (0,955)] / 114,85 = [19,4 + 420,2] / 114,85 = 3,8276$

2) VA = 0 $\rightarrow$ $- 1000 + I \cdot 0,98 + I \cdot 0,97 + (1000 + I) \cdot 0,96 = 0$ $\rightarrow$ I (0,98 + 0,97 + 0,955) = - 960 + 1000 $\rightarrow$ $\rightarrow$ I = 40 / 2,905 = 13,76

3) c = C / F ovvero I / F = 13, 76 / 1000 = 0,01376 = 1,37 % Per quotare sotto la pari deve essere TAN < c.

Data la struttura dei fattori di sconto a pronti $d_{(0,1)}$, $d_{(0,2)}$, $d_{(0,3)}$, $d_{(0,4)}$ (dove il tempo è espresso in anni), calcolare *1. Il* ***prezzo a pronti****, e il* ***prezzo a termine*** *con scadenza in t = 1 del flusso x|t = {10, 10,110}|{2,3,4} 2. L'importo R per cui il flusso x|t = {- 100, R, R}|{1,2,3} è equo (cioè ha valore nullo) in t = 0.*
3. Il ***TAN*** *che deve avere un titolo che paga cedole annuali e durata 3 anni* ***per quotare sopra la pari****.*
[$d_{(0,1)} = 0,98$ $d_{(0,2)} = 0,97$ $d_{(0,3)} = 0,96$ $d_{(0.4)} = 0,955$]

1) **Prezzo a pronti**

$P_1 = 10 \cdot d_{(0,2)} + 10 \cdot d_{(0,3)} + 110 \cdot d_{(0.4)} = 10 \cdot 0,97 + 10 \cdot 0,96 + 110 \cdot 0,955 = 9,7 + 9,6 + 105,05 = 124,35$

Prezzo a termine

$P_F = P_1\ (1 + S_1) = P_S / d_{(0,1)} = 124,35 / 0,98 = 126,887755$

2) VA: $-100d_{0,1} + R \cdot d_{0,2} + R \cdot d_{0,3} = 0$ $\rightarrow$ $R = 100d_{0,1} / (d_{0,2} + d_{0,3}) = 100\ (0,98) / (0,97 + 0,96) = 50,777$

3) **Calcoliamo il tasso di parità** (λ = c) e (P = F); ricordiamo inoltre che $\mathbf{C = c \cdot F}$ e quindi $\mathbf{c = \frac{C}{F}}$

$\mathbf{P = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3}}$ $\rightarrow$ $P = C \cdot d_{0,1} + C \cdot d_{0,2} + (C + F) \cdot d_{0,3}$ $\rightarrow$ $F = C\ (d_{0,1} + d_{0,2} + d_{0,3}) + F \cdot d_{0,3}$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $F\ (1 - d_{0,3}) = C\ (d_{0,1} + d_{0,2} + d_{0,3})$ $\rightarrow$ $c = \frac{C}{F}$ $\rightarrow$ $(1 - d_{0,3}) / (d_{0,1} + d_{0,2} + d_{0,3}) = \frac{C}{F}$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $c = \frac{1 - 0,96}{0,98 + 0,97 + 0,96} = 0,01374 = 1,37\ \%$ (Il TAN deve essere maggiore di questo valore).

Il flusso x = (200; 500) | (2; 5) ha valore attuale Vx e lo zero coupon bond che scade tra 5 anni ha valore attuale Vy. Calcolare i fattori di sconto a 2 e a 5 anni. **Secondo l'ipotesi della dinamica basata sulle aspettative di mercato**, *quale sarà il prezzo tra due anni del titolo che rimborsa 1000 euro tra 5 anni*? [Vx = 645; Vy = 92]

$$\begin{cases} 200\ (d_{0,2}) + 500\ (d_{0,5}) = Vx \\ 100\ (d_{0,5}) = Vy \end{cases} \quad \begin{cases} (d_{0,2}) = [(-500 \cdot 0,92) + 645] / 200 \\ (d_{0,5}) = 92/100 = 0,92 \end{cases} \quad \begin{cases} (d_{0,2}) = 0,925 \\ (d_{0,5}) = 0,92 \end{cases}$$

Secondo la dinamica delle aspettative il valore atteso in un determinato anno coincide con il valore a termine di quell'anno, quindi:

$d_{(0,5)} = d_{(0,2)} \cdot d_{(2,5)} \rightarrow \quad (d_{2,5}) = \frac{d_{(0,5)}}{d_{(0,2)}} = \frac{0{,}92}{0{,}925} = 0{,}99459$

$P = (d_{2,5}) \cdot F \quad \rightarrow \quad P = 0{,}99459 \cdot 1000 = 994{,}59$

La successione di flussi di cassa {10; 10; 200} | {2; 4; 7} dove il tempo è misurato in mesi, viene venduta a un prezzo P_0 e ha un TIR i. *Calcolare P_0* [i = 15% annuo]

$(1 + r)^{mt} = (1 + r_m) \quad \rightarrow \quad r_m = (1 + r)^{mt} - 1 \quad \rightarrow \quad r_m = (1{,}15)^{1/12} - 1 \quad \rightarrow \quad r_m = 0{,}0117$

$VA(x) = P = \frac{10}{(1+i)^2} + \frac{10}{(1+i)^4} + \frac{200}{(1+i)^7} = 10/(1{,}15)^2 + 10/(1{,}15)^4 + 200/(1{,}15)^7 = 9{,}77 + 9{,}5456 + 184{,}3657 = 203{,}68$

Le quotazioni odierne degli zero coupon bond con scadenze 3 mesi, 9 mesi ed 1 anno sono, rispettivamente P_3; P_9; P_{12}. Inoltre, un'obbligazione con cedola trimestrale (ovvero m = 4), TAN = 8% e scadenza tra 6 mesi ha un prezzo Q. Determinare:

1. ***I tassi a pronti*** *(in percentuale e su base annua) s_3; s_6; s_9 con scadenze tra 3, 6, 9 mesi.*
2. *Il valore attuale V_0 di un capitale C = 1250 disponibile tra 6 mesi.*
3. ***Il tasso a termine*** *(in percentuale e su base annua) $f_{3,6}$ tra 3 e 6 mesi.* [P_3 = 98; P_9 = 97; P_{12} = 96,5; Q = 98]

1) I **fattori di sconto** sono:

$P_3 = d_{0,3} \cdot 100 \quad \rightarrow \quad d_{0,3} = 98/100 = 0{,}98$

$P_9 = d_{0,9} \cdot 100 \quad \rightarrow \quad d_{0,9} = 97/100 = 0{,}97$

$P_{12} = d_{0,12} \cdot 100 \quad \rightarrow \quad d_{0,12} = 96{,}5/100 = 0{,}965$

I **tassi a pronti a 3, 6, 9 mesi** si trovano con la seguente formula: $\mathbf{S_k = [1 / (d_k)^{1/k}] - 1}$ ovvero $1+S_k = d_k^{-1/k}$

$S_3 = [1 / (d_{0,3})^{12/3}] - 1 = (1/0{,}92236) -1 = 0{,} 083 = 8{,}3\ \%$

$S_9 = [1 / (d_{0,9})^{12/9}] - 1 = (1/0{,}9602) -1 = 0{,} 04144 = 4{,}14\ \%$

Per trovare S_6 e quindi $d_{0,6}$ poniamo $Q = 2 \cdot d_3 + 102 \cdot d_6 \quad \rightarrow \quad d_{0,6} = (Q - 2 \cdot d_3) / 102 = [98 - (2 \cdot 0{,}98)] / 102 = 0{,}941568$ $S_6 = [1 / (d_{0,6})^{12/6}] - 1 = (1/0{,}88655) -1 = 0{,}1279 = 12{,}79\ \%$

2) $V_0 = C \cdot (d_{0,6}) \quad \rightarrow \quad V_0 = 1250 \cdot 0{,}941568 = 1176{,}96$

3) $d_{0,6} = d_{0,3} \cdot d_{3,6} \quad \rightarrow \quad d_{3,6} = d_{0,6} / d_{0,3} = 0{,}941568 / 0{,}98 = 0{,}9607$

$F_{3,6} = [1/(d_{3,6})^{12/3}] - 1 = [1/0{,}851826] - 1 = 0{,}173948$ o anche $f = [1/(1 + r)^{3/12}] - 1$

La costruzione di un nuovo tratto autostradale ha un costo iniziale di 10 milioni di Euro. La società realizzatrice verrà ripagata con i pedaggi dei successivi 5 anni e stima che genereranno la seguente successione di flussi di cassa (in milioni di euro)

X = (4; 4; 4; 6; 6) | (1; 2; 3; 4; 5) Utilizzando la struttura dei tassi a pronti assegnata determinare:

1. *La convenienza o meno dell'investimento in base al criterio del VAN.*
2. *Il valore attuale in t = 3,* **secondo la dinamica basata sulle aspettative**, *dei pedaggi che verrannopagati in t = 4 e in t = 5.*

[$S_1 = 0{,}061$ $S_2 = 0{,}062$ $S_3 = 0{,}063$ $S_4 = 0{,}064$ $S_5 = 0{,}065$]

1) Sappiamo che $d_{0,k} = 1/(1+S_k)^k \quad \rightarrow \quad d_{01} = 1 / (1{,}061) \quad \rightarrow \quad d_{01} = 0{,}942507$

$d_{02} = 1 / (1{,}062)^2 \quad \rightarrow \quad d_{02} = 0{,}886647$

$d_{03} = 1 / (1{,}063)^3 \quad \rightarrow \quad d_{03} = 0{,}83253$

$d_{04} = 1 / (1{,}064)^4 \quad \rightarrow \quad d_{04} = 0{,}780249$

$d_{05} = 1 / (1{,}065)^5 \quad \rightarrow \quad d_{05} = 0{,}729881$

VA = $- 10 + 4(d_{01} + d_{02} + d_{03}) + 6(d_{04} + d_{05}) = - 10 + (3{,}77 + 3{,}5465 + 3{,}33) + (4{,}6814 + 4{,}3792) = -10 + (19{,}7) = 9{,}707$

L'investimento risulta conveniente se tale valore risulta positivo. (abbiamo calcolato anche il – 10 però)

2) Secondo la dinamica delle aspettative il valore atteso futuro coincide con l'attuale prezzo a termine, quindi:

$(d_{3,4}) = (d_{0,4}) / (d_{0,3}) = 0{,}780249/ 0{,}83253= 0{,}9372$

$(d_{3,5}) = (d_{0,5}) / (d_{0,3}) = 0{,}729881/ 0{,}83253= 0{,}8767$

$V_3 = 6\ d_{34} + 6\ d_{35} = 6\ (0{,}9372) + 6\ (0{,}8767) = 5{,}6232 + 5{,}2602 = 10{,}88$

Data la struttura dei fattori di sconto a pronti $(d_1; d_2; d_3) = (0{,}95; 0{,}90; 0{,}80)$ con scadenze 1, 2 e 3 anni, *determinare la cedola I per cui* **il titolo che paga** *(I, I, 100 + I) sia* **quotato alla pari**. (ovvero P = F e I = λ) [$(d_1; d_2; d_3) = (0{,}95; 0{,}90; 0{,}80)$]

Dobbiamo porre P = F facendo VA (x) = F (che sottintendiamo essere 100).

$Id_1 + Id_2 + (100 + I)\ d_3 = 100 \quad \rightarrow \quad I\ (d_1 + d_2 + d_3) = 100 – 100\ d3 \quad \rightarrow \quad I = (100 – 100d3) / (d_1 + d_2 + d_3) =$ 7,54 €

Gli zero coupon bond che scadono rispettivamente tra 2 anni e tra 5 anni valgono rispettivamente P_2 e P_5. Determinare i **tassi a pronti** a 2 e a 5 anni e il **tasso a termine** tra 2 e 5 anni. *Calcolare il valore attuale del flusso x = (200, 500) | (2, 5).*
[$P_2 = 96$; $P_5 = 92$]

$P_2 = dF \quad \rightarrow 96 = d_{0,2}\ 100 \quad \rightarrow \quad d_{0,2} = 96/100 = 0{,}96$

$P_5 = dF \quad \rightarrow 92 = d_{0,5}\ 100 \quad \rightarrow \quad d_{0,5} = 92/100 = 0{,}92$

$S_2 = 1/ (d_{0,2})^{1/2} – 1 = (1/0{,}979795) – 1 = 0{,}02062 = 2{,}06\ \%$

$S_5 = 1/ (d_{0,5})^{1/5} – 1 = (1/0{,}98346) – 1 = 0{,}0168 = 1{,}68\ \ d_{0,2,5}$

$= d_{0,5} / d_{0,2} = 0{,}92/0{,}96 = 0{,}95833$

F_{25}: $d_{0,2,5} = 1/(1+r)^3 \quad \rightarrow \quad (1 + r)^{-3} = 1/ d_{0,2,5} \quad \rightarrow r = 1/(d_{0,2,5})^{1/3} -1 = 0{,}01428$ V

$= 200\ (0{,}96) + 500\ (0{,}92) = 192 + 460 = 652$

In un mercato perfetto, il prezzo di uno zero coupon bond che scade tra 2 anni è P_1, quello di un coupon bond con cedole annuali, che paga la prossima cedola tra un anno, rimborsa il capitale tra due anni, e ha TAN 5% è P_2. Determinare *1. il* **prezzo a pronti** *dello zero coupon bond che scade tra un anno.*
2. il **prezzo a termine**, *con consegna tra un anno, dello zero coupon bond che scade tra due anni.*
[$P_1 = 89$; $P_2 = 98$] (come è consuetudine, considerare un F = 100).

1) $P_1 = 100d_2 \quad \rightarrow \quad d_2 = 89 / 100 = 0{,}89$

$C = cF = 5\% \cdot 100 = 0{,}05 \cdot 100 = 5$

$P_2 = C\ (d_1) + (C + F)(d_2) \quad \rightarrow \quad 98 = [5\ (d_1)] + (105)\ (d_2)] \quad \rightarrow \quad d_1 = [- 105\ (0{,}89) + 98] / 5 = 0{,}91$

$P_1 = 100d_1 \quad \rightarrow \quad P_1 = 100 \cdot 0{,}91 = 91$

2) $d_{12} = d_{02} / d_{01} = 0{,}89 / 0{,}91 = 0{,}9780$

$P = F \cdot d_{12} = 100 \cdot 0{,}9780 = 97{,}8$

Due zero coupon bond che scadono tra uno e due anni hanno un prezzo rispettivamente di 99 e 98,5 mentre una terza obbligazione che scade tra tre anni ed ha un prezzo P assicura il seguente flusso di pagamenti [10; 10; 110] | [1; 2; 3]. *Qual è il* **tasso spot** *a tre anni implicito in tali prezzi?* [P = 96] Per i ZCB vale P = dF quindi:

$P_1 = 100d_1 \rightarrow d_1 = 99 / 100 = 0{,}99$ $P_2 = 100d_2 \rightarrow d_2 = 98{,}5 / 100 = 0{,}985$

$P_3 = 10d_1 + 10d_2 + 10d_3 \rightarrow 96 = 10(0{,}99) + 10(0{,}985) + 10(d_3) \rightarrow d_3 = (96 - 9{,}9 - 9{,}85) / 110 = 0{,}6931$ $d_3 = 1/(1 + r)^3 \rightarrow r = [1/ (d_3)^{1/3}] - 1 \rightarrow r = (1/0{,}8849) - 1 = 0{,}13$ %

Uno zero coupon bond (ZCB) che scade tra 2 anni ha un prezzo di 98,60 €; Sia P_N il prezzo di un secondo ZCB che scade tra N anni. *Determinare il* ***tasso a termine*** *r (su base annua) tra 2 e N anni*. [N = 7; P_N = 96,4]

$P_2 = Fd_2 \rightarrow 98{,}60 = 100\, d_2 \rightarrow d_2 = 98{,}60 / 100 \rightarrow d_2 = 0{,}986$ $P_7 = Fd_7 \rightarrow 96{,}4 = 100d_7 \rightarrow d_7 = 96{,}4 / 100 \rightarrow d_7 = 0{,}964$ $d_{07} = d_{02} \cdot d_{27} \rightarrow d_{27} = d_{07} / d_{02} \rightarrow d_{27} = 0{,}97768$ $d_{27} = 1 / (1 + r)^{7-2} \rightarrow 0{,}97768 = 1 / (1 + r)^5 \rightarrow r = (d_{27})^5 - 1$ o anche $r = [1/(d_{27})^{1/5}] - 1 \rightarrow \rightarrow r = [1/0{,}9955] - 1 = 0{,}0045 = 0{,}45\%$

OBBLIGAZIONI – DURATION – IMMUNIZZAZIONI

Consideriamo un mercato in cui opera una banca ideale con tasso annuo r. Determinare il valore attuale di un titolo che rimborsa un importo costante I al termine di ogni anno da oggi in poi, per sempre. Tale **titolo è più o meno rischioso** (dal punto di vista della sensibilità alle variazioni di tasso di interesse) di uno zero coupon bond che rimborsa il capitale dopo 20 anni? Motivare la risposta. [I = 10, r = 10%] $P_1 = I / r = 10 / 0{,}1 = 100$

La **duration di una rendita perpetua** è $D_1 = 1 + \frac{1}{r} = 1 + 1/0{,}1 = 11$

$D_{ZCB} = 20$

E' meno rischioso perché la duration del titolo 1 è minore della duration dello ZCB.

Ho investito C_1 euro in uno zero coupon bond che scade tra 2 anni e C_2 euro in uno zero coupon bond che scade tra 4 anni. *Se il TIR dell'investimento aumenta di 1% di quanto cambia approssimativamente il valore dell'investimento*. [C_1 = 2000; C_2 = 6000]

$D = 2000/8000 \cdot 2 + 6000/8000 \cdot 4 = 0{,}5 + 3 = 3{,}5$

Per valori molto piccoli di r allora $D_M \approx D$

$W' = W \cdot -D \cdot \Delta i + W = 8000\,(-3{,}5)\,(0{,}01) + 8000 = 7720$ quindi numericamente varia di 8000 - 7720 = 280 quindi percentualmente varia di $\frac{280}{8000} = 0{,}035 = 3{,}5$ % Consideriamo un mercato in cui opera una banca ideale con tasso annuo r e capitalizzazione degli interessi mensile. A quali prezzi sarebbe conveniente acquistare un titolo che rimborsa un importo costante I al termine di ogni mese da oggi in poi, per sempre? Investire un capitale in tale titolo è più o meno rischioso (dal punto di vista della sensibilità alle variazioni di tasso di interesse) che investirlo in uno zero coupon bond che rimborsa il capitale dopo 7 anni? Motivare la risposta. [I = 10; r = 10%] $r_m \approx r / m = 0{,}1 / 12 = 0{,}008333$

$VA = I / r_m = 10 / 0{,}008333 = 1200$ Sarebbe conveniente se P < VA

$D = 1 + 1/rm = 1 + 120 = 121$ mesi

La duration dello zero coupon bond è $D_{ZCB} = 7 \cdot 12 = 84$ mesi

$D > D_{ZCB}$ quindi l'investimento è più rischioso.

Consideriamo due obbligazioni. L'obbligazione A ha prezzo P_A e duration D_A, l'obbligazione B ha prezzo P_B e duration D_B. *Quanto denaro occorre investire in A e in B per* ***immunizzare un'uscita*** *al tempo T il cui valore attuale è 2500 Euro?* [$P_A = 95$ $D_A = 1$ $P_B = 105$ $D_B = 5$ $T = 3$]

$\begin{cases} V_A + V_B = 2500 \\ V_A D_A + V_B D_B = T \cdot \end{cases}$ $V_A =$ $\begin{cases} 2500 - V_B \\ 2500 (2500 - V_B)\ 1 + V_B\ (5) = 3 \cdot \end{cases}$ $V_A = 2500 - V_B$ $\begin{cases} \\ 2500\ \ 2500 - V_B + 5V_B = 7500 \end{cases}$

$\begin{cases} V_A = 2500 - V_B \\ 4V_B = 7500 - 2500 \end{cases}$ $\begin{matrix} V_A = \\ V_B = \end{matrix}$ $\begin{cases} 1250 \\ 1250 \end{cases}$

$X_A = V_A / P_A = 13{,}15 \approx 14$ $X_B = V_B / P_B = 11{,}90 \approx 12$

Considerare una struttura per scadenza dei tassi di interesse costante e pari a i_0 e un portafoglio così suddiviso:
2 Milioni di Euro in obbligazioni di duration D_1
5 Milioni di Euro in obbligazioni di duration D_2
8 Milioni di Euro in obbligazioni di duration D_3
1) Calcolare la **duration modificata D_M del portafoglio**.
2) Supponendo che il livello dei tassi di interesse divenga $i_0 = i_0 + 0{,}05$ calcolare il **valore approssimato del portafoglio W_0** [$D_1 = 1$; $D_2 = 5$; $D_3 = 10$; $i_0 = 10\%$]

1) Il portafoglio vale (2 + 5 +8) M di € = 15 milioni
La duration del portafoglio è: **$D\pi = (P_1/P_\pi)D_1 + (P_1/P_\pi)D_2 + (P_1/P_\pi)D_3$** **dove $P_n/P_\pi = \alpha_n$**

→ Duration: $(2/15)D_1 + (5/15)D_2 + (8/15)D_3 = (0{,}133333)\ (1) + (0{,}33333)\ (5) + (0{,}53333)\ (10) = 7{,}13331$

Duration modificata D_M $= \frac{D}{(1 + i)} = 7{,}13331 / 1{,}1 = 6{,}48$

2) W' ≈ -DM (W) (Δi) + W

W' = - 6,48 (15) (0,05) + 15 = - 97,2 (0,05) + 15 = -4,86 + 15 = 10,14

L' obbligazione, con scadenza tra 10 anni, e TAN = 5% ha prezzo P_5 e lo zero coupon bond con la stessa scadenza ha prezzo P_0. *Determinare il* **prezzo P_{10} dell'obbligazione con TAN 10% che scade tra 10 anni**.
[$P_5 = 110$; $P_0 = 98$]

Le formule per questo esercizio si ricavano a partire dalla cedola, e sono:

C = 2x – y F = 2Fx – Fy P = 2Px – Py. Quindi:

10 = 2(5) – 0 F = 2 (100) – 100 P = 2 (110) – 98 = 122

Considerare una struttura per scadenza dei tassi di interesse costante e pari a i = 0,1. Un investitore ha investito il 30% del suo patrimonio W in obbligazioni di duration D_1, il 50% del suo patrimonio in obbligazioni di duration D_2, il 20% del suo patrimonio in obbligazioni di duration D_3. Fornire una stima approssimate del valore dell'investimento nel caso in cui:
1. Il livello dei tassi i aumenti di 0,01
2. Il livello dei tassi i diminuisca di 0,005
[$D_1 = 1$ $D_2 = 5$ $D_3 = 10$ $W = 250.000$]

La duration del portafoglio è: $D\pi = (P_1/P_\pi)D_1 + (P_1/P_\pi)D_2 + (P_1/P_\pi)D_3$ dove $P_n/P_\pi = \alpha_n$

→ $D\pi = (30/100)D_1 + (50/100)D_2 + (20/100)D_3 = 0{,}3(1) + 0{,}5\ (5) + 0{,}2\ (10) = 0{,}3 + 2{,}5 + 2 = 4{,}8$

$D_M = D_\pi / (1 + i) = 4{,}8 / 1{,}1 = 4{,}3636$

Sia W' il nuovo valore del portafoglio in seguito ad una variazione dei tassi pari a Δ, quindi:

$W' \approx W(1 - D_M\,\Delta i)$ ovvero $W' \approx W \cdot - D_M \cdot \Delta i + W$ dove $D_M = D/(1 + i)$

1) $W' \approx (250.000)(-4{,}3636)(0{,}01) + (250.000) = -10909 + 250.000 = 239.091$

2) $W' \approx (250.000)(-4{,}3636)(-0{,}005) + (250.000) = +5454{,}5 + 250.000 = 255454{,}5$

La seguente tabella riporta i pagamenti di quattro obbligazioni:

	A	B	C	D
Anno 1	10	5	0	0
Anno 2	10	105	100	0
Anno 3	110	0	0	100

Considerando una struttura per scadenza dei tassi di interesse costante al livello r, determinare:

*1. I **prezzi di ciascuna obbligazione**.*

*2. La **duration** di ciascuna obbligazione.*

*3. Quale **obbligazione è più sensibile** alle variazioni di rendimento.*

4. Supponete di dovere pagare un capitale X tra due anni e mezzo. Quanto denaro occorre investire nei titoli C e D per ottenere un portafoglio immunizzato?

5. Volendo utilizzare per l'immunizzazione un'obbligazione diversa dalla C, mantenendo invece la D, potreste utilizzare l'obbligazione A? E l'obbligazione B? [r = 8%; X = 1 (milione)]

A = (10; 10; 110) | (1, 2, 3) B = (5; 105; 0) | (1, 2, 3) C = (0; 100; 0) | (1, 2, 3) D = (0; 0; 100) | (1, 2, 3)

1) $P_A = 10/(1{,}08) + 10/(1{,}08)^2 + 110/(1{,}08)^3 = 9{,}259 + 8{,}5733 + 87{,}32 = 105{,}15$

$P_B = 5/(1{,}08) + 105/(1{,}08)^2 = 4{,}629 + 90 = 94{,}62$

$P_C = 100/(1{,}08)^2 = 85{,}73$

$P_D = 100/(1{,}08)^3 = 79{,}38$

2) $D_A = \{1[10/(1{,}08)] + 2[10/(1{,}08)^2] + 3[110/(1{,}08)^3]\} / 105{,}15 = (9{,}259 + 17{,}1546 + 261{,}96)/105{,}15 = 288{,}37/105{,}15 = 2{,}7424$

$D_B = \{1[5/(1{,}08)] + 2[105/(1{,}08)^2] / 94{,}62 = 4{,}629 + 180 / 94{,}62 = 184{,}629 / 94{,}62 = 1{,}95$

$D_A = \{2[100/(1{,}08)^2\} / 85{,}73 = 171{,}46 / 85{,}73 = 2$

$D_A = \{3[100/(1{,}08)^3\} / 79{,}38 = 238{,}14 / 79{,}38 = 3$ 3) L'obbligazione più sensibile alle variazioni di rendimento è la D, perché ha duration maggiore.

4) $V_1 + V_2 = VA$ → $X_C + X_D = V_0$

$D_1V_1 + D_2V_2 = T \cdot VA$ Dove $V_0 = X / (1+r)^{2,5}$

$2X_C + 3X_D = 2{,}5\, V_0$

Risolviamo e troviamo $X_C = V_0 / 2$ $X_D = V_0 / 2$

5) Occorre che la duration della seconda obbligazione sia minore di 2,5 quindi l'obbligazione B va sempre bene, mentre per l'obbligazione A dipende dal valore di r.

Due zero coupon bond che scadono tra uno e due anni hanno un prezzo rispettivamente di 99 e 98,5 mentre una terza obbligazione che scade tra tre anni ed ha un prezzo P assicura il seguente flusso di pagamenti [10; 10; 110] | [1; 2; 3]. Calcolare la duration D di un portafoglio che investe 100 euro su ciascuna delle tre obbligazioni. [P = 96 $d_1 = 0{,}99$ $d_2 = 0{,}985$ $d_3 = 0{,}6931$]

$D_1 = 1$ e $D_2 = 2$ perché per ZCB Duration = T (scadenza)

Duration di un flusso di importi: $\Sigma_{k=1}^{n}[(t_k \cdot x_k \cdot d_k) / x_k \cdot d_k]$ **dove: t = scadenza; x = flusso; d = fattore di sconto**

→ D = [1 · 10 · (0,99) + 2 · 10 · (0,985) + 3 · 110 · (0,6931)] / 10 · (0,99) + 10 · (0,985) + 10 · (0, 6931) = 258,24 / 96 = 2, 69

Duration di un portafoglio: $D\pi = [(VA_1 / VA_{123}]\cdot D_1 + [VA_2 / VA_{123}]\cdot D_2 + [(VA_3 / VA_{123}]\cdot D_3$

→ Dπ = (100/300) · 1 + (100/300) · 2 + (100/300) · 2,69 = 0,3333 (1 + 2 + 2,69) = 1, 89

PORTAFOGLIO

Un mercato e' composto da 3 titoli i cui tassi di rendimento r_1 r_2 r_3 sono indipendenti (quindi COV = 0). Siano $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ e $\bar{r}_3$ σ_1 σ_2 σ_3 i rispettivi rendimenti medi e deviazioni standard. *Quale dei tre titoli è efficiente in media-varianza?*
[$\sigma_1 = 0,4$; $\sigma_2 = 0,6$; $\sigma_3 = 0,6$; $\bar{r}_1 = 0,1$; $\bar{r}_2 = 0,2$; $\bar{r}_3 = 0,3$]

$$\left[\;\right]\left[\;\right] - \lambda \left[\;\right] - \mu \left[\;\right] = \left[\;\right]$$

$w_1 \bar{r}_1 + w_2\bar{r}_2 + w_3\bar{r}_3 = \bar{r}$ r

$w_1 + w_2 + w_3 = 1$

$$\left[\;\right]\left[\;\right] - \lambda \left[\;\right] - \mu \left[\;\right] = \left[\;\right]$$

esempio portafoglio 1 (procedura da ripetere x gli altri 2 porta fogli).

$$\begin{cases} 0,16 - 0,1\,\lambda - \mu = 0 \\ 0 - 0,2\,\lambda - \mu = 0 \\ 0 - 0,3\,\lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

il portafoglio 1 non è efficiente

$$\begin{cases} 0 - 0,1\,\lambda - \mu = 0 \\ 0,36 - 0,2\,\lambda - \mu = 0 \\ 0 - 0,3\,\lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

il portafoglio 2 non è efficiente

$$\begin{cases} 0 - 0,1\,\lambda - \mu = 0 \\ 0 - 0,2\,\lambda - \mu = 0 \\ 0,36 - 0,3\,\lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

il portafoglio 3 non è efficiente

I titoli A, B e C sono efficienti in media e varianza. Il rendimento atteso di B è pari alla media tra i rendimenti attesi di A e di C. La correlazione tra i rendimenti di A e C è 0,5, le loro deviazioni standard sono a σ_A e σ_C. *Determinare la varianza dei rendimenti di B.*
[$\sigma_A = 10\%$ $\sigma_c = 30\%$ $\rho = 0,5$]

$$\bar{r}_B = \frac{\bar{r}_A + \bar{r}_B}{2} = \frac{1}{2}\,\bar{r}_A + \frac{1}{2}\,\bar{r}_B \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad (1-\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_B^2 = \alpha^2 \cdot (\sigma_A)^2 + (1-\alpha)^2 \cdot (\sigma_C)^2 + 2\,\alpha \cdot (1-\alpha)\,\rho\,\sigma_A\,\sigma_C = 0,0025 + 0,0225 + 0,0075 = 0,0325$$

I titoli A e B sono efficienti in media e varianza. Il rendimento del titolo A ha media m_A e deviazione standard σ_A, mentre quello del titolo B ha media m_B e deviazione standard σ_B. La correlazione tra i due rendimenti è pari a ρ. Dire se in un tale mercato è possibile, e in tal caso dire come, investire nei seguenti portafogli

1. un portafoglio con lo stesso rendimento atteso di B ma con la metà della sua varianza

2. un portafoglio con la stessa varianza di A ma con il doppio del suo rendimento atteso 3. Qual è la varianza minima di un portafoglio che ha il doppio del rendimento atteso di B? [$m_A = 5\%$ $\sigma_A = 20\%$ $m_B = 30\%$ $\sigma_B = 40\%$ $\rho = 0,3$]

1) non è possibile perché B è efficiente

2) non è possibile perché A è efficiente

3) Per il teorema dei due fondi tutti i portafogli efficienti si ottengono combinando A e B.

$\alpha\, m_A + (1-\alpha)\, m_B = 2\, m_B \quad \rightarrow \quad \alpha = \dfrac{m_B}{m_A - m_B} = -1,2 \qquad (1-\alpha) = 1 + 1,2 = 2,2$

$\boldsymbol{\sigma_c = \alpha^2 \cdot (\sigma_A)^2 + (1-\alpha)^2 \cdot (\sigma_B)^2 + 2\,\alpha \cdot (1-\alpha)\,\rho\,\sigma_A\,\sigma_B} = 0,0576 + 0,7744 - 0,12672 = 0,70528$

Un mercato è composto da tre titoli i cui tassi di rendimento r_1; r_2; r_3 sono indipendenti, con valori attesi $\bar{r}_1 = 10\%$; $\bar{r}_2 = 10\%$; $\bar{r}_3 = 20\%$ e deviazioni standard $\sigma_1 = 10\%$; $\sigma_2 = 20\%$; $\sigma_3 = 30\%$. Dire se qualcuno tra i tre titoli è efficiente in media e varianza.

$- \lambda \qquad - \mu \qquad =$

$\begin{cases} 0,01 - 0,1\,\lambda - \mu = 0 \\ 0,1\,\lambda - \mu = 0 \\ 0,2\,\lambda - \mu = 0 \end{cases}$ il portafoglio 1 non è efficiente

$\begin{cases} 0,1\,\lambda - \mu = 0 \\ 0,04 - 0,1\,\lambda - \mu = 0 \\ 0,2\,\lambda - \mu = 0 \end{cases}$ il portafoglio 1 non è efficiente

$\begin{cases} 0,1\,\lambda - \mu = 0 \\ 0,1\,\lambda - \mu = 0 \\ 0,2\,\lambda - \mu = 0 \end{cases}$ il portafoglio 3 è efficiente

I portafogli A e B sono efficienti in media e varianza. I rendimenti di tali portafogli hanno correlazione ρ, deviazioni standard σ_A e σ_B e valori attesi r_A, r_B. *Determinare la deviazione standard σ_m del portafoglio efficiente di rendimento atteso r = 0,05*

[ρ = 0,1; σ_A = 0,2; σ_B = 0,6; r_A = 0,1; r_B = 0,2] $\mathbf{\bar{r}_\pi = \alpha \cdot r_1 + (1-\alpha)\, r_2}$ → $\alpha = (\bar{r}_\pi - r_2)$ / $(r_1 - r_2)$ = (0,05 – 0,2) / (0,1 – 0,2) = -0,15 / - 0,1 = 1,5

_ = $\alpha^2 \cdot \sigma_A^2 + (1-\alpha)^2\, \sigma_B^2 + 2\,\rho\,\alpha\,(1-\alpha)\,\sigma_A\,\sigma_B$ = $(1,5)^2$ (0,04) + $(-0,5)^2$ (0,36) + 2 (0,1) (1,5) (-0,5) (0,2) (0,6) = = 0,09 + 0,09 - 0,018 = 0,162

√ = 0,4024

Stessidatiesprec. I portafogli A e B sono efficienti in media e varianza. I rendimenti di tali portafogli hanno correlazione ρ, deviazioni standard σ_A e σ_B e valori attesi r_A, r_B. *La deviazione standard σ_m del portafoglio efficiente di rendimento atteso r = 0,05 è 0,40. Calcolare il rendimento atteso r_M del portafoglio a varianza minima* [ρ = 0,1; σ_A = 0,2; σ_B = 0,6; r_A = 0,1; r_B = 0,2] $\mathbf{\rho = \sigma_{AB} /}$

$\mathbf{(\sigma_A\ \sigma_B)}$ COV = $\sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho$ = (0,2) (0,6) (0,1) = 0,012

Per trovare il portafoglio di minima varianza per N = 2 titoli tra di loro correlati si usa questa formula:

$$\alpha = \frac{\sigma_B^2 - \text{COV}}{\sigma_A^2 - 2\,\text{COV} + \sigma_B^2} = \frac{(0,36 - 0,012)}{(0,04 - (2 \cdot 0,012) + 0,36)} = \frac{0,348}{0,376} = 0,9255$$

$1 - \alpha = 1 - 0,9255 = 0,0754$

$\bar{r} = \alpha \cdot r_1 + (1-\alpha)\, r_2$ = (0,9255) (0,1) + (0,0745) (0,2) = 0,09255 + 0,0149 = 0,10745 = 10,74 %

Un mercato è composto da tre titoli i cui tassi di rendimento r_1, r_2, r_3 sono indipendenti con valori attesi $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ e deviazioni standard σ_1 σ_2 σ_3.

1. Il primo dei titoli è efficiente in media varianza?

2. Il portafoglio composto da quote annuali (cioè (1/3, 1/3, 1/3)) dei tre titoli è efficiente in media-varianza?

[r_1= 2,5 % r_2 = 2,5 % r_3 = 3 % σ_1 = 20% σ_2 = 25% σ_3 = 30%]

1)

- λ - μ =

$$\begin{cases} 0,0004 - 2,5\,\lambda - \mu = 0 \\ 2,5\,\lambda - \mu = 0 \\ 3\,\lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

il portafoglio 1 non è efficiente

2)

0

- λ - μ =

$$\begin{cases} 0,0004\,(1/3) - 2,5\,\lambda - \mu = 0 \\ 0,0625\,(1/3) - 2,5\,\lambda - \mu = 0 \\ 0,09\,(1/3) - 3\,\lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

il portafoglio non è efficiente

II rendimento del portafoglio A ha media m_A deviazione standard σ_A, mentre quello del portafoglio B ha media m_B e deviazione standard σ_B. La correlazione tra i due rendimenti è pari a ρ. Si vuole investire un patrimonio W = 2500 tra i due portafogli in modo da ottenere un rendimento atteso pari al doppio di m_A.
Quanto denaro occorre investire in A e quanto in B? Qual'è la varianza del rendimento dell'investimento? [m_A = 5% σ_A = 20% m_B = 30% σ_B = 40%   p = 0,3]

1) $\alpha = (2m_A - m_B) / (m_A - m_B) = [(2)(0{,}05) - 0{,}3] / (0{,}05 - 0{,}3) = -0{,}2 / -0{,}25 = 0{,}8$ $(1 - \alpha) = 0{,}2$

Quindi in A investiamo $\alpha \cdot W = 0{,}8 \cdot 2500 = 2000$ in B investiamo $(1 - \alpha) \cdot W = 0{,}2 \cdot 2500 = 500$

2) $\boldsymbol{\sigma = \alpha^2 \cdot (\sigma_A)^2 + (1 - \alpha)^2 \cdot (\sigma_B)^2 + 2\,\alpha \cdot (1 - \alpha)\,\rho\,\sigma_A\,\sigma_B} = 0{,}0256 + 0{,}0064 + 0{,}00768 = 0{,}03968$

Il rendimento del portafoglio A ha media m_A e deviazione standard σ_A, mentre quello del portafoglio B ha media m_B e deviazione standard σ_B. La correlazione tra i due rendimenti è pari a ρ. Si vuole investire un patrimonio W tra i due portafogli in modo da ottenere un rendimento atteso pari al doppio di μ_A. *Quanto denaro occorre investire in A e quanto in B? Qual è la varianza del rendimento dell'investimento?*
[m_A = 5%; σ_A = 20%; m_B = 30%; σ_B = 40%;   ρ = 0,3;   W = 1000]

1) $\alpha = \frac{(2m_A - m_B)}{(m_A - m_B)} = [(2)(0{,}05) - 0{,}3] / (0{,}05 - 0{,}3) = -0{,}2 / -0{,}25 = 0{,}8$ $(1 - \alpha) = 0{,}2$

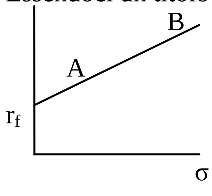
Quindi in A investiamo $\alpha \cdot W = 0{,}8 \cdot 1000 = 800$ in B investiamo $(1 - \alpha) \cdot W = 0{,}2 \cdot 1000 = 200$

2) $\sigma = \alpha^2 \cdot (\sigma_A)^2 + (1 - \alpha)^2 \cdot (\sigma_B)^2 + 2\,\alpha \cdot (1 - \alpha)\,\rho\,\sigma_A\,\sigma_B = 0{,}0256 + 0{,}0064 + 0{,}00768 = 0{,}03968$

In un mercato composto da titoli rischiosi e da un titolo non rischioso (quindi σ = 0), i portafogli A e B sono efficienti in media e varianza ed hanno rendimento atteso e deviazioni standard dei rendimenti pari a r_A, r_B, σ_A, σ_B.
1. Calcolare il rendimento non rischioso r_f.
2. Calcolare il rendimento atteso r_C del portafoglio efficiente con deviazione standard pari a tre volte σ_B. [r_A = 12%, r_B = 15%; σ_A = 30%; σ_B = 40%]

1) **TEOREMA A 1 FONDO**

Essendoci un titolo non rischioso la frontiera efficiente è data da una retta di equazione $\mathbf{r = r_f + m \cdot \sigma}$



Imponendo il passaggio per i punti A e B che rappresentano i portafogli efficienti, si determinano r_f e m:

$\begin{cases} r_A = r_f + m \cdot \sigma_A \\ 0{,}15 = r_f + 0{,}4m \end{cases}$ $\begin{cases} 0{,}12 = r_f + 0{,}3m & r_f = \\ 0{,}12 - 0{,}3m + 0{,}4\,m = \end{cases}$ $\begin{cases} 0{,}12 - 0{,}3\,m & r_f = 0{,}12 - 0{,}3 \\ 0{,}15\,m = 0{,}03/0{,}1 = 0{,}3 \end{cases}$ $\begin{cases} (0{,}3) = 0{,}03 & r_B = r_f + m \cdot \sigma_B \end{cases}$

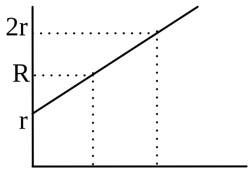
Più precisamente:

$$rf = \frac{r_A\,\sigma_B - r_B\,\sigma_A}{\sigma_B - \sigma_A} = 0{,}03 = 3\ \% \qquad m = \frac{r_B - r_A}{\sigma_B - \sigma_A} = 0{,}3$$

2) $r_C = r_f + m\,3\sigma_B = 0{,}03 + (0{,}3)\,3(0{,}4) = 0{,}03 + 0{,}36 = 0{,}39 = 39\ \%$

In un mercato composto da titoli rischiosi e da un titolo non rischioso (quindi $\sigma = 0$), il rendimento del titolo non rischioso è r. Inoltre sia R il rendimento atteso di un portafoglio efficiente con deviazione standard σ.

1. *Determinare la composizione del portafoglio efficiente di rendimento atteso pari al doppio del rendimento del titolo non rischioso.*
2. *Potrebbe esistere in tale mercato un portafoglio con rendimento atteso pari al doppio del rendimento del titolo non rischioso e deviazione standard pari al doppio di a?* [r = 6%, R= 10%, σ = 20%] 1)In questo caso vale il **teorema di un fondo**:



- quota da investire nel titolo non rischioso $\alpha \cdot r + (1-\alpha) R = 2 \cdot r \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{2r - R}{r - R} = \frac{2(0{,}06)-(0{,}1)}{0{,}06 - 0{,}1} = 0{,}02 / -0{,}04 = -0{,}5$

- quota da investire nel titolo rischioso: $(1-\alpha) = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$

2) No, non esiste perché il titolo non rischioso è un titolo efficiente: il doppio della varianza del titolo non rischioso è 2 x 0 = 0. Un titolo con varianza pari a 0 e rendimento atteso pari a 2r si troverebbe fuori dalla frontiera di efficienza.

In un mercato due titoli sono efficienti in media e varianza. Siano $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ e σ_1 e σ_2 i rispettivi rendimenti medi e deviazioni standard. Sia inoltre ρ la correlazione tra di essi. *Calcolare il rendimento atteso R del portafoglio efficiente a varianza minima.*

[$\bar{r}_1 = 0{,}1$; $\bar{r}_2 = 0{,}2$; $\sigma_1 = 0{,}4$; $\sigma_2 = 0{,}6$; $\rho = 0{,}3$] **COV**

$= \sigma_{12} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho$ $= 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}072$

$$\alpha = \frac{\sigma_2^2 - COV}{\sigma_1^2 - 2COV + \sigma_2^2} = (0{,}36 - 0{,}072) / (0{,}16 - 0{,}144 + 0{,}36) = 0{,}7659$$

$1 - \alpha = 1 - 0{,}7659 = 0{,}24$ $r_\pi = \alpha \cdot \bar{r}_1 + (1-\alpha) \cdot \bar{r}_2 = 0{,}7659 \cdot 0{,}1$

$+ 0{,}24 \cdot 0{,}2 = 0{,}12459$

In un mercato con N titoli i portafogli A e B sono efficienti. I rendimenti di tali portafogli sono non correlati (quindi $\rho = 0$), con deviazioni standard σ_A e σ_B e valori attesi r_A, r_B.

1. *Determinare il rendimento atteso $\bar{r}$ del portafoglio efficiente di minima varianza.*
2. *In tale mercato esiste un portafoglio efficiente con varianza dei rendimenti pari alla media tra le varianze dei rendimenti di A e di B? In caso di risposta affermativa, calcolarne il rendimento atteso.*

[$\_{A} = 0{,}4$ $_{B} = 0{,}8$ $\rho = 0$ $\bar{r}_A = 0{,}1$ $\bar{r}_B = 0{,}2$]

1) Per il **teorema dei due fondi** tutti i portafogli si ottengono combinando linearmente i portafogli A e B.

Sappiamo che $r = \alpha \cdot r_A + (1-\alpha)\, r_B$ inoltre sappiamo che se i 2 titoli sono scorrelati ($\rho = 0$) il portafoglio di minima varianza si trova così:

$$\alpha = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} = \frac{0,64}{0,16 + 0,64} = 0,8 \qquad (1 - \alpha) = \frac{\sigma_A^2}{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)} = 0,2$$

$$\bar{r} = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \cdot r_A + \frac{\sigma_A^2}{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)} r_B = 0,8 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,12$$

dunque

2) La varianza del portafoglio a varianza minima è pari a

$$^2 = \alpha^2 \cdot \sigma_A^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_B^2 = 0,64 \cdot 0,16 + 0,04 \cdot 0,64 = 0,1024 + 0,0256 = 0,128$$

$\_ = \sqrt{0,128} = 0,365777$

$\bar{\sigma} = \sigma_A + \sigma_B) / 2 = (0,4 + 0,8) / 2 = 0,6$

DOMANDE

Considerare un flusso di pagamenti a rata costante annuale di durata N anni. Il valore attuale del flusso rispetto a un tasso annuo i > 0...

(a) ...è crescente rispetto a N e illimitato per N che tende a infinito. (b) ...è crescente rispetto a N e limitato per N che tende a infinito.

(c) ...è decrescente rispetto a N e tende a 0 per N che tende a infinito.

→ infatti basta ipotizzare valori numerici nella formula $V = I \cdot a_{n\neg r} = I \cdot \frac{1 - d^N}{r}$ e scopriamo che è crescente, poi se N tende a infinito sappiamo che la formula cambia in $V = \frac{I}{r}$ e che ci da un numero limitato.

Quale dei seguenti flussi di cassa risulta avere TIR del 10% (il tempo è espresso in anni) (a) {- 100, 50, 50, 10} {0, 1, 2, 3}
(b) {- 100, 0, 0, 110} {0, 1, 2, 3}
(c) {0, 0, 100, -110} {0, 1, 2, 3} → basta porre VA = 0 e trovare r = 0,01

Due flussi equivalenti rispetto a una banca ideale
(a) hanno sempre lo stesso TIR
(b) non hanno mai lo stesso TIR
(c) possono in alcuni casi avere lo stesso TIR

"Immunizzare un portafoglio obbligazionario" vuol dire:
(a) proteggerlo dal rischio di liquidità.
(b) proteggerlo dal rischio di tasso d'interesse.
(c) proteggerlo dal rischio di default.
(d) aumentarne la diversificazione.
(e) nessuna delle precedenti

La successione di flussi di cassa $(x_0, x_1, ..., x_n)$ con $x_0 < 0$ e $x_k \geq 0$ ha TIR = q. Il VAN calcolato rispetto ad un tasso $r < q$ è:
1) positivo per n pari, negativo per n dispari
2) sempre positivo
3) negativo per n pari, positivo per n dispari 4) sempre negativo 5) dipende da q.

Supponiamo che il tasso a pronti a un anno sia minore del tasso a pronti a due anni, allora:
(a) il tasso a termine tra uno e due anni è sempre compreso tra i due tassi a pronti.
(b) il tasso a termine tra uno e due anni è sempre più grande dei due tassi a pronti.
(c) il tasso a termine tra uno e due anni è sempre più piccolo dei due tassi a pronti.
(d) il tasso a termine può essere compreso tra i due tassi a pronti oppure maggiore di entrambi, a seconda dei casi.

Supponiamo che il tasso a pronti a un anno sia maggiore del tasso a pronti a due anni, allora:
1. il tasso a termine tra uno e due anni è sempre compreso tra i due tassi a pronti.
2. il tasso a termine tra uno e due anni è sempre più grande dei due tassi a pronti.
3. il tasso a termine tra uno e due anni è sempre più piccolo dei due tassi a pronti.
4. il tasso a termine può essere compreso tra i due tassi a pronti oppure maggiore di entrambi, a seconda dei casi.

Si osserva che il tasso a termine tra uno e due anni è maggiore del tasso a pronti a due anni. Allora possiamo concludere che:
(a) il tasso a pronti a un anno è minore del tasso a pronti a due anni.
(b) il tasso a pronti a un anno è maggiore del tasso a pronti a due anni.
(c) il tasso a pronti a un anno è uguale al tasso a termine
(d) il tasso a termine può essere compreso tra i due tassi a pronti oppure maggiore di entrambi, a seconda dei casi.

Quale delle seguenti obbligazioni risulta più sensibile rispetto alle variazioni dei tassi di interessi? 1) coupon bond con scadenza 10 anni e TAN 10%
2) zero coupon bond con scadenza 10 anni
3) zero coupon bond con scadenza 1 anno
4) coupon bond con scadenza 2 anni e TAN 5%

Sia C > 0. Quale tra i seguenti flussi di cassa ha TIR pari a zero?
(a) (-C, C, - (C+C/10), C + C/5) |(0,1,2,3)
(b) (-C, C/2, C/3, C/4, |(0,1,2,3)
(c) (-C/4, C/2, -C/4, C/2) |(0,1,2,3)
(d) Nessuno dei precedenti

Il TAN di un'obbligazione è minore del suo yield to maturity, quindi...
(a) ... l'obbligazione quota sopra la pari
(b) ... l'obbligazione quota sotto la pari
(c) ... il valore dell'obbligazione dipende dalla duration

Per un titolo a tasso variabile...
(a) il flusso di pagamenti è aleatorio come il valore attuale
(b) il flusso di pagamenti è aleatorio ma il valore attuale è deterministico
(c) il flusso di pagamenti è deterministico ma il valore attuale è aleatorio (d) nessuno dei precedenti

Consideriamo due BTP il primo con TAN 10%, l'altro con TAN 5% e un BOT. Tutti i titoli hanno la stessa maturity. Indicare il titolo più sensibile e quello meno sensibile rispetto alle variazioni di tasso di interesse. In ordine crescente rispetto alla sensibilità: 1) BTP 10 % 2) BTP 5 % 3) BOT

Consideriamo la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti i (0,S). Se $t_1 < t_2$, quale delle seguenti relazioni deve essere sempre verificata se non si vogliono consentire arbitraggi?
(a) $i(0, t_1) \geq i(0,t_2)$
(b) $i(0, t_1) \leq i(0,t_2)$
(c) $i(0, t_1) > i(0,t_2)$
(d) $i(0, t_1) < i(0,t_2)$
(e) nessuno dei precedenti

Un gestore di un portafoglio obbligazionario prevede un futuro innalzamento del livello dei tassi di interesse. Quale delle seguenti azioni è la conseguenza più plausibile:
(a) alzare la duration del portafoglio
(b) abbassare la duration del portafoglio

Un gestore di un portafoglio obbligazionario prevede un futuro abbassamento del livello dei tassi di interesse. Quale delle seguenti azioni è la conseguenza più plausibile:
(a) vendere immediatamente tutto e investire in titoli azionari
(b) alzare la duration del portafoglio
(c) abbassare la duration del portafoglio

Quale delle seguenti azioni comporta più verosimilmente uri aumento della duration di un portafoglio obbligazionario? (a) vendere BOT e acquistare CCT
(b) vendere BOT e acquistare BTP
(c)vendere CCT e acquistare BTP

Quale delle seguenti azioni comporta più verosimilmente una diminuzione della duration di un portafoglio obbligazionario?
(a) vendere BOT e acquistare CCT (b) vendere BOT e acquistare BTP
(c) vendere CCT e acquistare BTP

Se si prevede uno scenario futuro di abbassamento dei tassi di interesse, quale delle seguenti azioni risulta preferibile? 1. vendere BOT a 1 anno e acquistare CCT a 10 anni
2. vendere BOT a 1 anno e acquistare BTP a 10 anni (per aumentare la duration)

3. vendere CCT a 10 anni e acquistare BOT a 1 anno

Secondo il criterio del VAN, tra due investimenti si sceglie
(a) sempre quello con il VAN maggiore
(b) quello con il VAN maggiore, se anche il TIR è maggiore
(e) quello con il VAN maggiore, ma solo se il TIR non è minore

Per un titolo a tasso variabile...
(a) il flusso di pagamenti è aleatorio come il valore attuale
(b) il flusso di pagamenti è aleatorio ma il valore attuale è deterministico
(c) il flusso di pagamenti è deterministico ma il valore attuale è aleatorio (d) nessuno dei precedenti

ALTRI ESERCIZI UTILI

Mostrare come effettuare un **arbitraggio** se $d^{(0,5,10)} > \frac{d_{(0,10)}}{d_{(0,5)}}$

Si può realizzare un arbitraggio nel seguente modo:
1. Acquisto a pronti 1 zcb che scade in 10
2. Vendo a pronti $d_{(0,5,10)}$ zcb che scadono in 5
3. Vendo a termine, con consegna in 5, 1 zcb che scade in 10.

In questo modo si ha un introito positivo pari a $d_{(0;5;10)} \cdot d_{(0;5)} - d_{(0;10)}$ e nulla nelle date future.

Formule da ricordare

1) in assenza di arbitraggio vale: $\mathbf{(1 + S_2)^2 = (1 + f_{1,2})(1+S_1)}$

2) per i tassi forward: $\mathbf{f_{i,j} = \left[\frac{(1 + S_j)}{(1+S_i)}\right]^{\frac{1}{j-i}} - 1}$

3) **2 flussi di cassa x e y** (considerando una banca ideale) **sono equivalenti** se i rispettivi VA sono uguali.

In questo caso è possibile trasformare l'uno

nell'altro. *Esempio* x = (1,0,0) y = (0,0, 1,21)

r = 10% Svolgendo troviamo **VAx = VAy**

Per trasformare l'uno nell'altro bisogna trovare il flusso z il cui valore attuale sia zero ovvero
z = y – x = (0,0, 1,21) - (1,0,0) = (-1,0, 1,21)

Poi troviamo VAz usando il flusso z e quindi VAz = VAy – Vax = 0

Per finire: **x = y – z** **y = x + z**

Il calcolo del valore attuale ci permette di confrontare tra loro due flussi x e y secondo il criterio del VAN.