FORMULARIO DI MATEMATICA GENERALE

UNINFORMAZIONE

Formulario di Matematica

1. Funzioni:

• Dominio:

1) Razionale fratta:

$y = \frac{f(x)}{g(x)}$

Condizione: $g(x) \neq 0$

2) Irrazionale con radice ad "n" pari:

$y = \sqrt{f(x)}$

condizione: $f(x) \geq 0$

3) Esponenziale:

$y = e^{f(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Condizione: nessuna

4) logaritmo:

$y = \log f(x)$

condizione: $f(x) > 0$

• Studio del segno:

1) Razionale fratta:

$y = \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$

N: $f(x) \geq 0$
D: $g(x) > 0$

2) Irrazionale con radice ad "n" pari:

$y = \sqrt{f(x)} \geq 0$

$f(x) \geq 0$
positiva nell'intervallo di definizione

3) Esponenziale:

1° caso: $e^{f(x)} > 0$ sempre
2° caso: $-e^{f(x)} > 0$ mai

4) Logaritmo:

$\log f(x) > 0$

eleviamo ad "e" sia il logaritmo che lo $\emptyset$:

$e^{\log f(x)} > e^0$ in modo da ottenere:

$f(x) > 1$, studiandola così come una semplice funzione.

• Limiti:

1) Razionale fratta:

$$\lim_{x \to n^{\pm}} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \exists \text{ A.V.} \\ \pm n^{\pm} & \nexists \text{ A.V.} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \pm n^{\pm} & \exists \text{ A.O.} \\ \pm\infty & \nexists \text{ A.O.} \end{cases}$$

2) Irrazionale con radice ad "n" pari:

$$\lim_{x \to \pm n^{\pm}} \sqrt[n]{f(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \exists \text{ A.V.} \\ \pm n^{\pm} & \nexists \text{ A.V.} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{f(x)} = \begin{cases} \pm n^{\pm} & \exists \text{ A.O.} \\ \pm\infty & \nexists \text{ A.O.} \end{cases}$$

3) Esponenziale:

$$\lim_{x\to\pm n^{\pm}} e^{f(x)} = \begin{cases} \pm\infty \ \exists \text{ A.V.} \\ \pm n^{\pm} \ \nexists \text{ A.V.} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{f(x)} = \begin{cases} \pm n^{\pm} \ \exists \text{ A.O.} \\ \pm\infty \ \nexists \text{ A.O.} \end{cases}$$

4) Logaritmo:

$$\lim_{x\to\pm n^{\pm}} \log f(x) = \begin{cases} \pm\infty \ \exists \text{ A.V.} \\ \pm n^{\pm} \ \nexists \text{ A.V.} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log f(x) = \begin{cases} \pm n^{\pm} \ \exists \text{ A.O.} \\ \pm\infty \ \nexists \text{ A.O.} \end{cases}$$

Possibili Soluzioni:

Per $\lim\limits_{x\to\pm n^{\pm}}$:

$\frac{n}{0^+} = +\infty$; $\frac{-n}{0^+} = -\infty$; $\frac{-n}{0^-} = +\infty$;

$\frac{n}{0^-} = -\infty$; $\frac{\pm n}{-\infty} = 0$; $\frac{0}{\pm n} = 0$;

$\frac{e^{\pm n^{\pm}}}{0} = \pm\infty$; $\ln 0^+ = -\infty$; $\log(\infty) = \infty$

$\log \frac{n}{0} = +\infty$; $\log n = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$;

Per $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$:

$\lim\limits_{x\to\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$; $\pm\frac{1}{x} = 0$;

$e^{\pm\infty} = 0$; $\frac{e^x}{x-n} = +\infty$; $\frac{\infty}{e^{\infty}} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\frac{1}{\pm\infty} = 0$

$\sqrt{x} = +\infty$; $\frac{1}{nx} = 0$; $\log 1 = 0$;

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = +\infty$

Asintoto orizzontale ($y = n$): esiste se facendo il $\lim\limits_{x\to\infty}$ ottieni "n" un numero finito (compreso lo ∅ ma escluso ∞). N.B. se esiste l'as. orizzontale a $+\infty$, non è detto che esista anche a $-\infty$. La presenza dell'as. orizzontale esclude l'asintoto obliquo, ma questo non vuol dire che se esiste l'as. orizzontale a $+\infty$ non possa esistere l'as. obliquo a $-\infty$

Asintoto obliquo ($y = mx+q$): potrebbe esserci se facendo il $\lim\limits_{x\to\infty}$ ottieni ∞, questa è la condizione necessaria, ma non sufficiente:

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \to$ se "m" è diverso da ∞ e da 0, si cerca "q" altrimenti non esiste l'as. obliquo).

$q = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) \to$ se "q" è diverso da ∞, allora esiste l'as. obliquo

Asintoto verticale ($x = n$): "n" escluso dalla C.E. (condizione di esistenza).

$\lim\limits_{x\to\text{"}n\text{"}} f(x) = \pm\infty$

Forme indeterminate: in questo caso si può applicare D.H (De l'Hopital), facendo la derivata del numeratore fratto la derivata del denominatore $DH = \frac{N'}{D'}$

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\infty \cdot 0$; $0 \cdot \infty$
- $\infty - \infty$
- ∞^0; 0^0; 1^∞

Limiti notevoli:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
3) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
4) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
5) $\lim_{x\to \infty} (1 + 1/x)^x = e$
6) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$

Corrispondente forma generalizzata:

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos f(x)}{(f(x))^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\log[1+f(x)]}{f(x)} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$

$\lim_{f(x)\to \infty} [1 + 1/f(x)]^{f(x)} = e$

$\lim_{f(x)\to 0} [1 + f(x)]^{1/f(x)} = e$

- Punti critici (o stazionari): Si svolge la derivata prima e la si uguaglia a $\emptyset$ e si studia $N=0$ e il $D=0$

Derivate:

1) Funzione fratta

$y = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad$ $y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$

Prodotto

2) $y = f(x) \cdot g(x)$ $\qquad$ $y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

3) Funzione con radice semplice

$y = \sqrt{x}$ $\qquad$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

funzione con radice composta:

$y = \sqrt{f(x)}$ $\qquad$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f(x)$

3) Funzione esponenziale semplice:

$y = e^x$ $\qquad$ $y' = e^x$

funzione esponenziale composta:

$y = e^{f(x)}$ $\qquad$ $y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

4) Funzione logaritmo semplice:

$y = \log x$ $\qquad$ $y' = \frac{1}{x}$

funzione logaritmo composta:

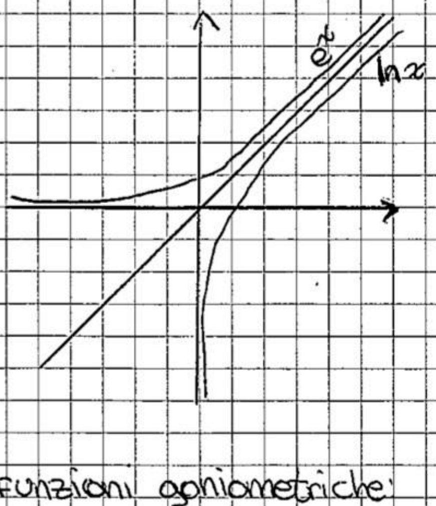
$y = \log f(x)$ $\qquad$ $y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

• Massimi e minimi locali: si studia la derivata ponendola > 0

$y' = \frac{N}{D} > 0$

$N: > 0$
$D: > 0$

• Grafici



• Derivate funzioni goniometriche:

$y = \sin(f(x))$ $\qquad$ $y' = f'(x) \cos(f(x))$

$y = \cos(f(x))$ $\qquad$ $y' = f'(x) \sin(f(x))$

8. Integrali - continuità/discontinuità - Hessiana semplice/con vincolo:

8.1) Integrali

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$ $\qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

2) $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$ $\qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$

3) $\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$ $\qquad \int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$

4) $\int x^{n}\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \qquad n \neq 1$

Integrale per parti:

$$\int f(x)\cdot g'(x) = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)$$

Integrale definito:

$$\int_a^b f(x)$$

dove "a" rappresenta l'estremo inferiore, e "b" l'estremo superiore. La funzione $f(x)$ è detta funzione integranda.

Si risolve l'integrale normalmente, come se fosse un integrale indefinito.

Successivamente si sostituisce prima "b" e poi "a" al risultato.
Il risultato finale sarà dato da: $F(b) - F(a)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

2.8) Continuità e discontinuità

esercizio guida:

$$f(x) = \begin{cases} 3^{1/x} + k & x < 0 \\ \dfrac{e^{2x} - 1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

svolgimento:

$$\lim_{x \to 0^-} 3^{\frac{1}{x}} + k = k \quad \text{(limite sinistro)}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \frac{0}{0} \quad \text{f. indeterminata} \quad \text{(limite destro)}$$

$$\frac{e^{2x} \cdot 2}{1} = 2e^{2x} = 2$$

$$\lim_{x \to 0^-} \rightarrow \lim_{x \to 0^+} \rightarrow k = 2$$

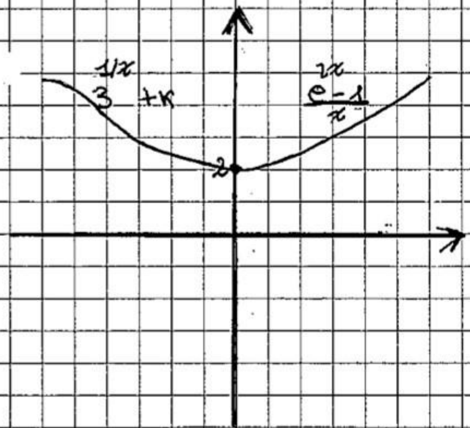


grafico a: continuità: $k=2$

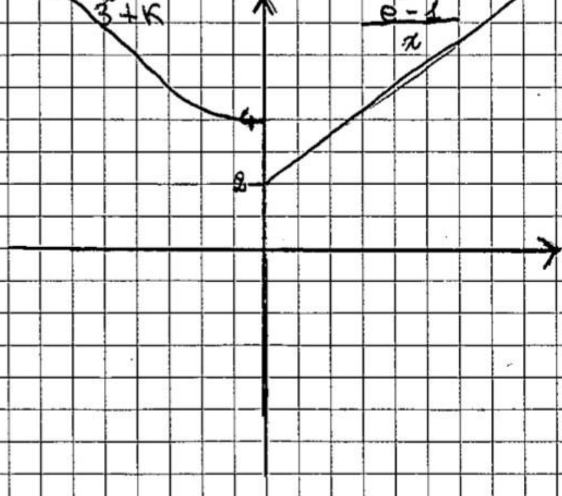


grafico b: discontinuità: 1° specie $k=4$

Commento: Nel caso si trattasse di **continuità** il "k" che darebbe il limite sinistro = al limite destro sarebbe uguale a 2 ($k=2$) grafico "a".

Nel caso si trattasse di **discontinuità** di 1° specie ed essendo presente il "k" solo al limite sinistro dobbiamo aggiungere un valore che comporti il salto, che essendo pari a 2 e partendo dal valore 2, è pari a $k=4$

2.3) Funzione con vincolo

$Z(x;y;\lambda) = f(x) + \lambda(g(x))$

$f(x)$ = funzione obiettivo
$g(x)$ = funzione vincolo
λ = moltiplicatore di Lagrange

Si inizia impostando il seguente sistema:

$$\begin{cases} Z_x(x;y;\lambda) = 0 \\ Z_y(x;y;\lambda) = 0 \\ Z_\lambda(x;y;\lambda) = 0 \end{cases}$$

derivate prime parziali

Si risolve il sistema e per verificare la natura dei punti trovati imposto l'Hessiana

Si fanno le derivate del vincolo $g(x)$ rispetto ad x e rispetto ad y:
$g(x) =$
$g(y) =$

Si fanno le derivate seconde di Z_x e di Z_y:

$L_{xx} =$
$L_{xy} =$
$L_{yy} =$
$L_{yx} =$

Con i risultati ottenuti si imposta l'Hessiana:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow \det H$$

$$\text{Se } \det H \begin{cases} > 0 \text{ e } f_{xx} < 0 & \text{P. MAX} \\ > 0 \text{ e } f_{xx} > 0 & \text{P. min} \\ < 0 & \text{P. di Sella} \end{cases}$$

N.B.
$f(xx)$ = è la derivata seconda di $f(x)$

3) Funzione Semplice e Gradiente

esercizio guida:

$f(x,y) = y^2x - 16y^2 - \frac{x^2}{2}$

N.B.
P.min se $\Delta H > 0$ e $f_{xx} > 0$
P.MAX se $\Delta H > 0$ e $f_{xx} < 0$
sella se $\Delta H < 0$
nulla se $\Delta H = 0$

Si procede con la derivata prima rispetto ad x e ad y

$f'_x(x,y) = y^2 - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}$

$f'_y(x,y) = 2yx - 32y$

e le metto a sistema

$\begin{cases} y^2 - x = 0 \\ 2yx - 32y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - x = 0 \\ \frac{2yx}{2y} = \frac{32y}{2y} \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - x = 0 \\ x = 16 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 = x \\ x = 16 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 = 16 \\ x = 16 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pm 4 \\ x = 16 \end{cases}$

quindi avremo due punti:

$P_1 = (16, -4)$
$P_2 = (16, 4)$

Poi si svolge la derivata seconda rispetto ad x, y, e incrociata xy, yx:

$f_{xx} = -1$
$f_{yy} = 2x - 32$
$f_{xy} = 2y$
$f_{yx} = 2y$

N.B.
Le derivate seconde incrociate devono essere sempre uguali, se vengono diverse allora probabilmente ci sarà un errore nelle derivate prime

$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2y \\ 2y & 2x-32 \end{vmatrix} = -2x + 32 - 4y^2 \gtreqless 0$

Si sostituisce P_1 per andare a vedere la natura

$P_1(16,-4) = -4y^2 - 2x + 32 = -4(-4)^2 - 2(16) + 32 = -64 < 0$ P. sella

Si sostituisce P_2 sempre per vedere la natura

$P_2(16,4) = -4y^2 - 2x + 32 = -4(4)^2 - 2(16) + 32 = -64 < 0$ P. sella

Gradiente: non sono altro che le due derivate prime

$\nabla(x,y) = (y^2 - x;\ 2yx - 32y)$

a) Matrice 3x3

a.1) esercizio guida

N.B.

$*\ \infty^{n-rg} \rightarrow$ dove n è il num. di incognite e rg il rango

$! \rightarrow$ un'unica soluzione

$$\begin{cases} x - ty - z = 1 \\ 2x + y + tz = t + 1 \\ x + y + z = t \end{cases}$$

Si studia la matrice incompleta "A"

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -t & -1 \\ 2 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -t \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = (1 - t^2 - 2) - (-1 + t - 2t) = 1 - t^2 - 2 + 1 - t + 2t = -t^2 + t = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow t(1-t) = 0 \quad t = 0$ e $1 - t = 0 \rightarrow -t = -1 \rightarrow t = 1$

$$rg\,A = \begin{cases} 2 \text{ se } t = 0 \text{ e } t = 1 \\ 3 \text{ se } t \neq 0 \text{ e } t \neq 1 \end{cases}$$

Si studia la matrice incompleta "B"

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -t & -1 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & t & \boxed{t+1} \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{t} \end{vmatrix}$$ orlatura

Si applica la regola dell'Orlando o Kroneker

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -t & 1 \\ 2 & 1 & t+1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -t \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = t - t(t+1) + 2 - 1 - t - 1 + 2t^2 = \cancel{t} - t^2 - \cancel{t} + \cancel{2} - \cancel{1} - t - \cancel{1} + 2t^2 =$$

$= t^2 - t = 0 \rightarrow t(t-1) = 0$

$t = 0$ e $t = 1$

$$rg\,B = \begin{cases} 2 \text{ se } t = 0 \text{ e } t = 1 \\ 3 \text{ se } t \neq 0 \text{ e } t \neq 1 \end{cases}$$

Per $t = 0$ $\quad rg\,A = rg\,B = 2$ quindi il sistema ammette $\infty^{3-2} \Rightarrow \infty^1$ soluzioni

Per $t = 0$ (risolvo il sistema per sostituzione) $\qquad z = w$

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + y = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + z \\ 2x + y = 1 \\ x + y = -z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + w \\ 2(1+w) + y = 1 \\ 1 + w + y = -w \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + w \\ 2 + 2w + y = 1 \\ 1 + w + y = -w \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 + w \\ w = z \\ y = -2w - 1 \end{cases} \qquad \text{soluzioni: } \left\{ \begin{array}{ccc} x & y & z \\ = & = & = \\ 1+w; & -2w-1; & w \end{array} \right\}$$

Per $t=1$ $rg A = rg B = 2$ quindi il sistema ammette $\infty^{3-2} \rightarrow \infty^1$ soluzioni

Per $t=1$ (risolvo il sistema per sostituzione)

$z = w$

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + z = 1 + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 1 + z \\ 2x + y = 2 - z \\ x + y = 1 - z \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 1 + w \\ 2x + y = 2 - w \\ x + y = 1 - w \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + w + y \\ 2 + 2w + 2y + y = 2 - w \\ 1 + w + y + y = 1 - w \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y = -3w \\ 2y = -2w \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + w - w \\ y \\ y = -w \end{cases}$$

$$\text{soluzioni: } \left\{ \begin{array}{ccc} x & y & z \\ = & = & \\ 1; & -w, & w \end{array} \right\}$$

Per $t \neq 0$ e $t \neq 1$ $rg A = rg B = 3$ il sistema ammette $\infty^{3-3} \rightarrow !$ soluzione

per $t \neq 0$ e $t \neq 1$ applico Cramer

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & -t & -1 & 1 & -t \\ t+1 & 1 & t & t+1 & 1 \\ t & 1 & 1 & t & 1 \end{array} \right|}{t(1-t)} = \frac{1 - t^3 - t - 1 + t - t + t(t+1)}{t(1-t)} = \frac{-t^3 + t^2}{t(1-t)} = \frac{\cancel{t}^2(\cancel{-t+1})}{\cancel{t}(\cancel{1-t})} = t$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & t+1 & t & 2 & t+1 \\ 1 & t & 1 & 1 & t \end{array} \right|}{t(1-t)} = \frac{t + 1 + t - 2t + t + 1 - t^2 - 2}{t(1-t)} = \frac{-t^2 + t}{t(1-t)} = \frac{\cancel{t}(\cancel{-t+1})}{\cancel{t}(\cancel{1-t})} = 1$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & -t & 1 & 1 & -t \\ 2 & 1 & t+1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 & 1 \end{array} \right|}{t(1-t)} = \frac{t - t^2 - t + 2 - 1 - t - 1 + 2t^2}{t(1-t)} = \frac{t^2 - t}{t(1-t)} = \frac{t(\cancel{t-1})}{t(\cancel{1-t})} = 1$$

$$\text{soluzioni: } \left\{ \begin{array}{ccc} x & y & z \\ = & = & = \\ t, & 1, & 1 \end{array} \right\}$$

Matrice 3x2

4) esercizio guida

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + ky = k \\ 3/2\,kx + y = 5 \end{cases}$$

1° passaggio: si analizza la matrice incompleta:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & k \\ \frac{3}{2}k & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & k \\ \frac{3}{2}k & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{3}{2}k^2 = 0$$

$$k^2 = \frac{2}{3} \rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$rg\,A = \begin{cases} 2 & \text{per } k \neq \pm\sqrt{2/3} \\ 3 & \text{per } k = \pm\sqrt{2/3} \end{cases}$$

$$A_2\left(k = \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} - (-1) \neq 0 \quad rg = 2$$

$$A_2\left(k = -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -2\sqrt{\frac{2}{3}} + 1 \neq 0 \quad rg = 2$$

$$A_3\left(k = \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} & 1 \end{vmatrix} = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 \quad rg = 2$$

$$A_3\left(k = -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} & 1 \end{vmatrix} = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 \quad rg = 2$$

Commento:
Essendo una matrice lineare (cioè di 1°: rette) il "k" può assumere un solo valore alla volta prendendo un minore 2x2, con il parametro "k" si analizzano quei valori di "k" che annullano il determinante. Sostituendo questi valori di "k" nelle altre sottomatrici quadrate, il determinante è $\neq 0$, quindi per il valore analizzato vi sono dei minori i cui determinanti non si annullano. Ergo $\forall k \in \mathbb{R}$ $rg = 2$.

→

→ 2° passaggio:

$$B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & k & k \\ \frac{3}{2}k & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & k \\ \frac{3}{2}k & 1 \end{matrix}$$

$$K = 10k - \frac{3}{2}k^2 + 3 + 5 - 2k - \frac{9}{2}k^2 =$$

$$= -\frac{12}{2}k^2 + 8k + 8 = -6k^2 + 8k + 8 = 0$$

$$= -3k^2 + 4k + 4 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-3)(4)}}{-6} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{-6}$$

$$= \frac{-4 \pm 8}{-6} = \begin{cases} \frac{-4+8}{-6} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} \\ \frac{-4-8}{-6} = 2 \end{cases}$$

$$rgB = \begin{cases} 2 \quad \text{per } k = -2/3 \text{ e } k = 2 \\ 3 \quad \text{per } k \neq -2/3 \text{ e } k \neq 2 \end{cases}$$

Commento:
La matrice incompleta assume lo stesso valore della matrice completa quando quest'ultima assume valori $k = -\frac{2}{3}$ e $k = 2$ quindi si studierà il sistema dato $k = -\frac{2}{3}$ e $k = 2$.

Quando $k \neq -\frac{2}{3}$ e $k \neq 2$ $rgA \neq rgB$ da R.C. il sistema non ammette soluzioni.

Per $k = 2$:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 2 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} -y = -2x + 3 \\ x = -2y + 2 \\ y = -3x + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = -2y + 2 \\ y = -3x + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 5 = 2x - 3 \\ x = -2y + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -5x = -8 \\ x = -2y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} = -2y + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ -2y = -\frac{2}{10} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{1}{10} \end{cases} \quad \text{soluzioni: } \left\{ x = 8/5 \, , \; y = 1/10 \right\}$$

Per $k = -2/3$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - 2/3\, y = -2/3 \\ -x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} -y = -2x + 3 \\ x = 2/3\, y - 2/3 \\ y = x + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3 = x + 5 \\ x = \frac{2}{3}y - \frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 13 \end{cases} \quad \text{soluzioni: } \left\{ x = 8 \, ; \; y = 13 \right\}$$

Breve schema riassuntivo:

Matrice

→ $rg\,A = rg\,B$

- $n \neq r$: indeterminato, $\infty^{n-r} = \infty^{1/2/ecc.}$, sistema
- $n = r$: 1 soluzione, cramer o sistema

→ $rg\,A \neq rg\,B$: incompatibile, nessuna soluzione

5) Piano tangente

$$z = f(x_0; y_0) + f_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f_y(x_0; y_0)(y - y_0)$$

6) Approssimazione della funzione con la serie di Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{IV}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \frac{f^{V}(x_0)}{5!}(x - x_0)^5$$

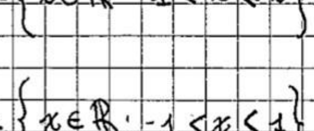
Commento: Si operano le diverse derivate fino a quella richiesta, si sostituisce il valore x_0 alle diverse derivate e si inseriscono nel polinomio di Taylor dividendo ogni derivata per il relativo fattoriale e moltiplicandolo per il relativo binomio associato.

7) Insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R}\ -1 < x \leq 2\} \cap \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R};\ -1 < x < 1\}$$

A=

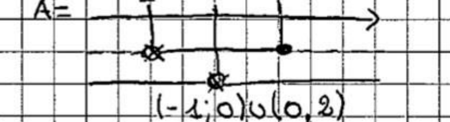


$(-1; 0) \cup (0, 2)$

B=

$(-1, 1)$

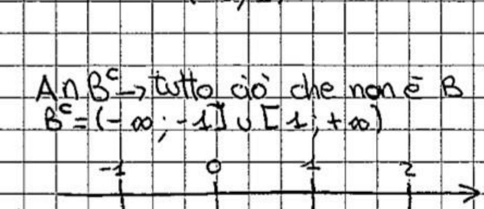
$A \cup B$



$(-1, 2)$

$A \cap B^c \rightarrow$ tutto ciò che non è B

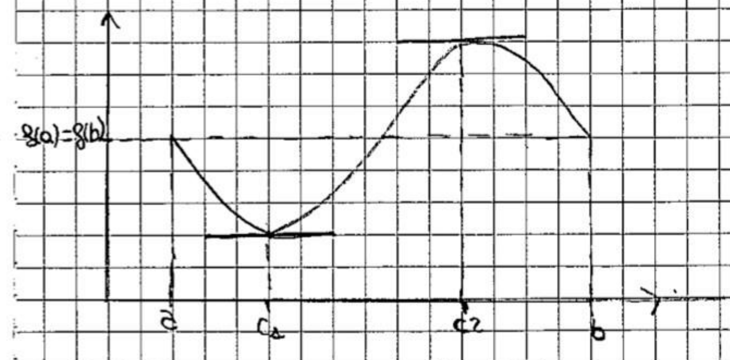
$B^c = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$



$(1, 2)$

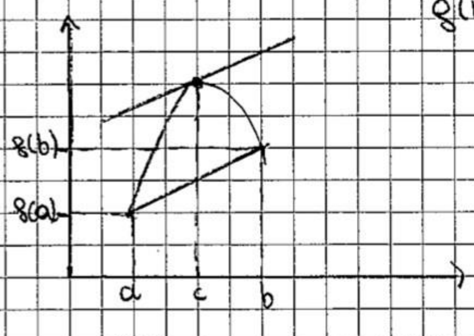
B/A zero   B/A^c tutto B

Teorema di Rolle: Se $y = f(x)$ è una funzione derivabile nell'intervallo aperto (A, B), è almeno continua agli estremi dell'intervallo assume valori uguali in tali estremi, allora esiste almeno un punto "c" appartenente ad (A, B) in cui la derivata si annulla.



Teorema di Lagrange: Se $y = f(x)$ è una funzione derivabile nell'intervallo aperto (a, b) ed è almeno continua agli estremi dell'intervallo stesso, allora esiste almeno un punto "c", appartenente ad (a, b) in cui l'incremento della funzione è uguale al prodotto tra l'ampiezza dell'intervallo, e la derivata calcolata in "c".

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$



Teorema di Torricelli-Barrow: La derivata di una funzione integrale in un punto coincide con il valore che la funzione integranda assume in quel medesimo punto.

$S'(t) = f(t)$

la derivata della funzione $\int_0^x \cos e^t \, dt$ è $D\left(\int_0^x \cos e^t \, dt\right) =$

$= \cos e^x$

Retta tangente ad una funzione di secondo grado dato un punto

1° passaggio:

derivata della funzione
calcolo $y = f'(x)$

2° passaggio:
valutare la funzione $y = f(x)$ nel punto $x = x_0$. In questo modo otteniamo l'ordinata $y_0 = f(x_0)$ ad esso corrispondente: il punto del grafico della funzione in cui la retta è tangente è proprio $(x_0\ f(x_0))$.
valuto $y_0 = f(x_0)$.

3° passaggio:
Scrivere l'equazione generica della retta.
Considerare $y = mx + q$

4° passaggio:
Valutare la derivata $y = f'(x)$ nel punto $x = x_0$ ottenendo $f'(x_0)$, che è un numero.
Tale valore è esattamente il coefficente angolare "m" della retta tangente.
valutare : $m = f'(x_0)$.

5° passaggio:
Sostituire $m = f(x_0)$ in $y = mx + q$ e imporre la condizione di passaggio della retta nel punto $(x_0 \cdot f(x_0))$. In questo modo otteniamo
$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + q$
Da cui possiamo determinare il parametro "q" (ordinata della retta all'origine), che è dato: $q = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

6° passaggio:
Riscrivere l'equazione della retta tangente: adesso si può specificarne il coefficente angolare "m" e l'ordinata all'origine "q" e quindi ricaviamo:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\, x_0$$

esercizio guida:

retta: $y + 7x - 3 = 0$ e $P(-1, 10)$

$y = -7x + 3$

1) $f(x) = x^2 + 5x + 4 \rightarrow y' = 2x + 5$ $\quad y(x_0 = -1) = 3$

2) $f(x) = x^2 - 5x - 4 \rightarrow y' = 2x - 5$ $\quad y(x_0 = -1) = -7$ $\quad f(x_0) = 1 + 5 - 4 = 2$

3) $f(x) = x^2 - 5x + 4 \rightarrow y' = 2x - 5$ $\quad y(x_0 = -1) = -7$ $\quad f(x_0) = 1 + 5 + 4 = 10$

$y = mx + q$

$y = -7x + q$

$q = +7x + y$

1° caso:

$q = 2 + 7(-1) = P(-5)$

2° caso:

$q = 10 - 7 = 3 \rightarrow y = -7x + 3$